ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa* | **Ulisse Dini** *in Pisa*
Luigi Cremona *in Roma* | **Giuseppe Jung** *in Milano*

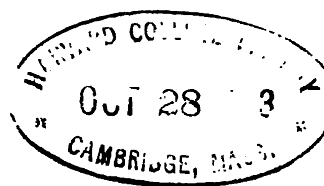
SERIE III.ª – TOMO IX.°

MILANO,
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

1904.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO IX.° (SERIE III.ª)



ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa* ‖ **Giuseppe Jung** *in Milano*
Ulisse Dini *in Pisa* ‖ **Corrado Segre** *in Torino*

SERIE III.ª

Tomo IX.° — Fascicolo 1.°

(Agosto 1903.)

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi (*).

(Di T. Levi-Civita, *a Padova.)*

Nel problema dei tre corpi (punti materiali, che si attraggono secondo la legge di Newton) le forze, e per conseguenza le equazioni differenziali del moto, hanno comportamento analitico regolare finchè le posizioni dei tre punti sono distinte. Di qui si intuisce che unica causa di singolarità pel movimento può essere il fatto che due dei tre corpi (o tutti tre) tendono a coincidere.

Più precisamente il sig. Painlevé ha dimostrato (**) che, a partire da un istante t_0 (e da condizioni iniziali qualisivogliono), possono sorgere, e sorgono effettivamente, singolarità, solo quando una almeno delle mutue distanze tende a zero al convergere di t verso un valore (finito) t_1.

In forma più espressiva si può dire evidentemente: Il moto prosegue regolare a meno che non intervengono urti entro un tempo finito.

Quali sono le condizioni iniziali singolari, a partire dalle quali si va incontro ad un urto? Ecco la questione, che sarà qui risoluta per il problema ristretto. Si tratta, come è ben noto, del moto piano di una massa infinitesima P, attratta da due masse finite S, J uniformemente ruotanti.

Considerando, per fissar le idee, gli urti P, S (lo stesso naturalmente si applica agli urti P, J) *riconosceremo che una sola relazione uniforme* $u = 0$ *è caratteristica dell'urto e la costruiremo effettivamente.*

In un intorno conveniente di S il primo membro u della relazione in-

---

(*) I risultati della presente ricerca — meno quello dell'ultimo paragrafo — sono stati esposti in due Note dei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (12 e 26 Gennaio 1903).

(**) « Leçons etc., professées à Stockholm », presso A. Hermann, Paris 1897, pag. 583.

variante predetta si presenta con duplice determinazione, di cui una corrisponde agli urti passati (eiezioni), l'altra agli urti futuri (collisioni).

Quanto alla condizione generica di un urto (P, S; o P, J; passato o futuro) essa si ottiene evidentemente eguagliando a zero un prodotto di due fattori: u e l'analogo u', relativo agli urti P, J.

Per natura loro, le relazioni $u = 0$, $u' = 0$, $u u' = 0$ (le quali esprimono che è avvenuto o avverrà un certo urto) sono invarianti, cioè a dire, se sono soddisfatte inizialmente, seguitano ad esserlo, se non lo sono in un istante generico, non lo saranno (nè lo furono) mai. In particolare la disuguaglianza

$$u u' \gtrless 0$$

assicura la indefinita, regolare prosecuzione del movimento.

Il risultato è esauriente dal punto di vista matematico, ma non si presta ancora ad applicazioni concrete. Infatti i corpi celesti si possono legittimamente assimilare a punti materiali soltanto a patto che le loro dimensioni sieno trascurabili rispetto alle distanze, a patto cioè (per date dimensioni e dato grado di approssimazione) che queste distanze non discendano al disotto di un certo limite ε. Bisogna dunque non oltrepassare questo limite perchè le conclusioni matematiche sieno accettabili. E in ispecie, per poter affermare che non c'è pericolo di urti a partire da un dato stato di moto, bisognerebbe saper riconoscere (per la soluzione teorica corrispondente) non soltanto che le mutue distanze non convergono a zero (ciò, che — almeno per il problema ristretto — siamo ormai in grado di fare) ma ancora che esse restano superiori ad un ε assegnato.

Non è chi non veda la capitale importanza della questione; ma altro è porla, altro risolverla, sia pure per il solo problema ristretto. Nulla posso ancor dirne e chiudo quindi la digressione.

Rientrando nel tema del presente scritto, farò notare che esso può anche, e più generalmente, risguardarsi come uno studio delle traiettorie singolari: intendo quelle traiettorie, che escono da uno dei due centri di attrazione — fissiamo S — o vi terminano (traiettorie di eiezione o traiettorie di collisione).

Io ho appunto cominciato (dopo le indispensabili generalità dei §§ 1-2) collo stabilire alcuni caratteri analitici di queste traiettorie singolari. Ne ho tratta la condizione dell'urto, e da essa, ritornando alle traiettorie, una applicazione di indole qualitativa.

Ecco di che si tratta.

Quando la massa del secondo centro J è nulla (problema dei due corpi) le traiettorie singolari sono rette ed è ben noto che, su queste traiettorie, il mobile si allontana indefinitamente o ritorna in S, secondo il valore ($\gtrless 0$) della costante delle forze vive.

Il comportamento deve essere analogo (salvo le complicazioni provenienti dalla presenza del punto singolare J) anche quando la massa μ di J non è più nulla.

In modo rigoroso ho potuto però dimostrare soltanto il teorema seguente:

Per valori della costante C di Jacobi maggiori dell'unità e per μ abbastanza piccolo, le traiettorie singolari, che escono da S, si rinchiudono tutte in S, dopo un percorso finito.

§ 1. Equazioni del moto. Forma canonica polare.

Uno dei tre corpi, P, ha massa trascurabile e non influisce quindi sul moto degli altri due S, J. Questo moto è il più semplice compatibile colla legge di Newton: S, J ruotano cioè uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O.

Il moto di P avviene nel piano, che contiene le due orbite circolari di S e di J.

Tutto si riduce così ad un problema con due gradi di libertà: moto piano di un punto P, sollecitato dall'attrazione newtoniana dei due centri variabili S, J.

Sieno $\nu = 1 - \mu$, μ le masse di S e di J, con che si suppone scelta per unità di massa la somma delle masse dei due corpi.

Convengasi ancora di assumere la distanza costante $\overline{SJ}$ per unità di lunghezza e l'unità di tempo in modo che la velocità angolare della retta SJ riesca eguale ad 1.

Con queste unità anche la costante di attrazione universale (costante di Gauss) risulta eguale ad 1, e il potenziale (unitario) U delle forze agenti su P è

$$\frac{\nu}{\overline{SP}} + \frac{\mu}{\overline{JP}}.$$

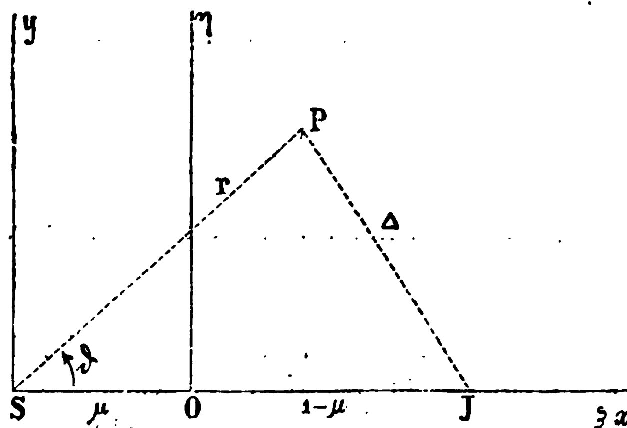
Posto

$$\overline{SP} = r, \quad \overline{JP} = \Delta, \quad J\widehat{S}P = \vartheta$$

(ove ϑ si intenderà contato nel senso della rotazione), avremo ovviamente

$$\Delta = |\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\vartheta}|, \qquad (1)$$

$$U = \frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}. \qquad (2)$$



Rispetto ad un sistema d'assi uniformemente ruotanti ξ, η coll'origine in O e la direzione positiva dell'asse ξ verso J, le coordinate di S sono $-\mu$, 0; quelle di J: ν, 0.

Suppongasi il verso $\xi\eta$ coincidente con quello della rotazione. Avremo allora dal teorema di Coriolis come componenti della accelerazione assoluta (di un generico punto P di coordinate ξ, η)

$$\xi'' - 2\eta' - \xi,$$

$$\eta'' + 2\xi' - \eta.$$

Le equazioni del moto risultano dall'eguagliare la accelerazione alla forza unitaria: saranno dunque nel caso presente:

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' - \xi = \dfrac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \eta = \dfrac{\partial U}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Riferiamole ad un sistema di assi x, y paralleli a ξ, η, coll'origine nel punto $S(-\mu,\ 0)$; poniamo cioè

$$\xi = x - \mu, \qquad \eta = y.$$

Esse divengono

$$\begin{cases} x'' - 2y' - x = \dfrac{\partial U}{\partial x} - \mu = \dfrac{\partial}{\partial x}(U - \mu x), \\ y'' + 2x' - y = \dfrac{\partial U}{\partial y} \qquad = \dfrac{\partial}{\partial y}(U - \mu x). \end{cases}$$

Per definizione r e ϑ non sono che coordinate polari, corrispondenti alle cartesiane x, y. Si ha quindi

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\vartheta,$$

da cui, derivando,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\vartheta = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -r\,\mathrm{sen}\,\vartheta = -y,$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\vartheta = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \quad r\cos\vartheta = \quad x.$$

Moltiplichiamo le superiori equazioni ordinatamente per $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$; $-y$, x, e sommiamo. Verrà

$$\begin{cases} \dfrac{x''x + y''y}{r} - \dfrac{2}{r}(xy' - yx') - r = \dfrac{\partial}{\partial r}(U - \mu r\cos\vartheta), \\ xy'' - yx'' + 2(xx' + yy') \qquad = \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r\cos\vartheta). \end{cases}$$

Ora

$$xy' - yx' = r^2\vartheta', \qquad xx' + yy' = rr',$$

e inoltre

$$\frac{x''x + y''y}{r} = r'' - r\vartheta'^2, \qquad xy'' - yx'' = \frac{d}{dt}(r^2\vartheta').$$

Abbiamo così le equazioni del moto in coordinate polari:

$$r'' - r\vartheta'^2 - 2r\vartheta' - r = \frac{\partial}{\partial r}(U - \mu r\cos\vartheta),$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\vartheta') + 2rr' \qquad = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r\cos\vartheta).$$

È facile attribuir loro forma canonica. Pongasi infatti

$$r' = R, \qquad \vartheta' = \frac{\Theta}{r^2} - 1, \tag{3}$$

con che

$$\Theta = r^2 (\vartheta' + 1),$$

e le nostre equazioni diverranno

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{\partial}{\partial r}(U - \mu r \cos\vartheta) + \frac{\Theta^2}{r^3} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{U - \mu r \cos\vartheta - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2} r^2\right\}, \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r \cos\vartheta) \qquad = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left\{U - \mu r \cos\vartheta - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2} r^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Complessivamente le (3) e (4) si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial R}, & \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \Theta}; \\ \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial r}, & \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

dove F sta per

$$\frac{1}{2}\left\{R^2 + r^2 \left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2\right\} - U + \mu r \cos\vartheta - \frac{1}{2} r^2.$$

Se si sostituisce ad U il suo valore (2) e si raccolgono invece i due termini in μ col porre

$$V = \frac{1}{\Delta} - r \cos\vartheta, \tag{5}$$

la espressione di F assume l'aspetto

$$F = \frac{1}{2}\left\{R^2 + r^2 \left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2\right\} - \frac{\nu}{r} - \mu V - \frac{1}{2} r^2. \tag{6}$$

Il significato cinematico delle variabili coniugate R, Θ risulta dalle (3), o, se si vuole, dalle stesse equazioni canoniche: $R = r'$ non è che la derivata del raggio vettore, $\Theta = r^2 (\vartheta' + 1)$ il doppio della velocità areolare (assoluta). Infatti ϑ' è la velocità angolare di P, relativa all'asse SJ; questo ruota con velocità angolare costante $= 1$; $\vartheta' + 1$ è dunque la velocità angolare assoluta e, per conseguenza, $\frac{1}{2} r^2 (\vartheta' + 1)$ la velocità areolare, pure assoluta.

§ 2. Integrale di Jacobi. Conseguenze, che esso permette di ricavare dall'ipotesi $\lim_{t=t_1} r = 0$.

Le (I) ammettono l'integrale

$$F = -C,$$

dove, secondo la consuetudine, la costante del secondo membro è designata con $-C$ (C costante di Jacobi).

Ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= r^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right), \\ \mathfrak{P} &= -2C + 2\mu V + r^2, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

la equazione $F = -C$ può essere scritta

$$\sigma^2 + r R^2 = 2\nu + r\mathfrak{P}. \qquad (8)$$

$\mathfrak{P}$ è una funzione, che resta finita per $r = 0$. Si ha infatti dalla (4), $V = 1$, per $r = 0$, donde $\mathfrak{P} = -2(C - \mu)$.

La (8) mostra quindi che, per r abbastanza piccolo, la somma $\sigma^2 + r R^2$ non può differir molto da 2ν. Ne segue in particolare, considerando r, R, Θ, e quindi anche r, R, σ come funzioni di t definite dalle (I):

a) *Se anche, al convergere di t verso un valore t_1, r tende a zero, σ e $\sqrt{r}\,R$ restano finite.*

Dico di più che:

b) *Per t abbastanza vicino a t_1, $R = \frac{dr}{dt}$ si mantiene costantemente diversa da zero; r converge quindi a zero, decrescendo.*

In primo luogo, si ha dalla (6)

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 - \frac{2}{r}\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)\Theta + \frac{\nu}{r^2} - \mu\frac{\partial V}{\partial r} - r,$$

ossia, per le (7) ed (8)

$$-\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left\{\nu - r R^2 + r\Omega\right\},$$

dove

$$\mathfrak{Q} = 2\sqrt{r}\,\sigma + \mu r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 + \mathfrak{P}$$

resta finita, quando r converge a zero.

Scriviamo le due equazioni

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R} = R$$

sotto la forma:

$$r\frac{dR}{dt} = \frac{1}{r}\{\nu - rR^2 + r\mathfrak{Q}\},$$

$$R\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\,r\,R^2$$

e sommiamole. Si ottiene

$$\frac{d(rR)}{dt} = \frac{\nu}{r} + \mathfrak{Q}.$$

Per r abbastanza piccolo, il primo termine del secondo membro prepondera su $\mathfrak{Q}$. Supposto dunque $\lim_{t=t_1} r = 0$, $\frac{d(rR)}{dt}$ conserva il medesimo segno (positivo) per t abbastanza vicino a t_1. La funzione rR varia così, da un certo punto in poi, nel medesimo senso, mentre t converge a t_1, e può perciò attraversare una volta al più il valore zero.

Seguitando t ad avvicinarsi a t_1, il prodotto rR non si annulla più: Non si possono quindi annullare nè r, nè $R = \frac{dr}{dt}$.

c. d. d.

Conviene dimostrare ancora un terzo lemma, cioè:

c) *Per t abbastanza vicino a t_1, il limite inferiore dei valori di rR^2 non è nullo.*

Moltiplicando le due equazioni

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad 2rR = 2r\frac{dr}{dt},$$

e aggiungendo $R^2\frac{dr}{dt}$ a entrambi i membri del prodotto, si trae:

$$\frac{d(rR^2)}{dt} = \frac{2}{r}\left\{\nu - \frac{1}{2}rR^2 + r\mathfrak{Q}\right\}\frac{dr}{dt}.$$

Proviamoci a supporre che il limite inferiore dei valori (essenzialmente $\geqq 0$) assunti da $r R^2$ sia zero. Esisterebbero dei valori $\bar{t}$ di t, vicini a t_1, quanto si vuole, in cui $r R^2$ sarebbe prossimo a zero, pure quanto si vuole, in particolare per es. $< \frac{1}{2} \nu$. Prendiamo $\bar{t}$ abbastanza vicino a t_1 (e quindi r a zero) perchè inoltre il valore assoluto di $r \Omega$ non superi $\frac{1}{4} \nu$. Avremo

$$\nu - \frac{1}{2} r R^2 + r \Omega > \frac{1}{2} \nu,$$

e il secondo membro della precedente equazione avrà il segno di $\frac{dr}{dt}$. Perciò, nel punto $\bar{t}$, la funzione $r R^2$ sarà, al pari di r, decrescente (nel senso $\bar{t}$, t_1).

Ora, diminuendo $r R^2$, la disuguaglianza

$$\nu - \frac{1}{2} r R^2 + r \Omega > \frac{1}{2} \nu$$

resta a fortiori soddisfatta. $r R^2$ seguita dunque a decrescere quando t si avvicina indefinitamente a t_1.

Così l'ipotesi che il limite inferiore sia zero, implicherebbe addirittura

$$\lim_{t=t_1} r R^2 = 0.$$

Ma questo è assurdo.

Infatti, $d r$ essendo negativo e, ripetiamolo,

$$\nu - \frac{1}{2} r R^2 + r \Omega > \frac{1}{2} \nu,$$

l'equazione

$$\frac{d (r R^2)}{d t} = \frac{2}{r} \left\{ \nu - \frac{1}{2} r R^2 + r \Omega \right\} \frac{d r}{d t}$$

dà luogo alla disuguaglianza

$$- d (r R^2) > - \nu \, d \log r,$$

che, integrata fra $\bar{t}$ e t, ove si designino con $\bar{r}$, $\bar{R}$ i valori delle funzioni r, R,

relativi al valore $\bar{t}$ di t, porge

$$\bar{r}\,\bar{R}^2 - r\,R^2 > \nu \log \frac{\bar{r}}{r}\,.$$

L'impossibilità è manifesta, poichè, al convergere di t verso t_1, il primo membro resta finito, mentre il secondo cresce indefinitamente.

§ 3. Generalità sulle traiettorie singolari Σ, lungo le quali interviene un urto P, S.

Per il teorema di Painlevé, ricordato nell'introduzione, il movimento, nel problema dei tre corpi, prosegue regolare, a meno che una delle tre distanze non tenda a zero, al convergere di t verso un valore finito t_1.

Nel caso nostro, essendo costante la distanza $\overline{SJ}$, due soltanto sono le ipotesi possibili (ed escludentisi a vicenda): P tende ad S; ovvero P tende a J. Potremo limitarci a contemplarne una e supporre per es.

$$\lim_{t=t_1} r = 0. \tag{9}$$

Nulla infatti distingue fra di loro i due corpi S, J nell'enunciato del problema ristretto; la notazione soltanto è asimmetrica, essendo appunto conveniente, per discutere gli urti P, S, assumere S come origine delle coordinate. Per quegli altri, basterebbe attribuire alle lettere il significato, che risulta dallo scambio di S con J.

Ciò posto, sia Σ una generica delle traiettorie singolari, su cui interviene un urto P, S, su cui cioè si verifica la (9). Per il lemma b) del precedente paragrafo, da un certo $\bar{t}$ in poi, $\frac{dr}{dt}$ si conserva diversa da zero: d'altra parte nell'intervallo $\bar{t}$, t_1, quest'ultimo valore al più escluso, r, e così le altre variabili R, ϑ, Θ sono funzioni regolari di t. Se ne deduce che t, e per conseguenza R, ϑ, Θ possono essere considerate funzioni di r, regolari per r abbastanza piccolo ($e > 0$). Le equazioni differenziali, che le definiscono, sono,

in virtù delle (I),

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial R}}, & \frac{dR}{dr} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F}{\partial R}}; \\ \frac{d\vartheta}{dr} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial \Theta}}{\frac{\partial F}{\partial R}}, & \frac{d\Theta}{dr} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial F}{\partial R}}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}')$$

Prescindendo dalla prima, rimane eliminato t; ma si può prescindere anche dalla seconda, sostituendole la relazione in termini finiti $F = -C$, che è atta a fornire R in funzione di r, ϑ, Θ e porge precisamente

$$R = \sqrt{\frac{2\nu}{r} - 2C + 2\mu V - r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)^2 + r^2}. \qquad (10)$$

Ritenuta per R questa espressione, le due rimanenti equazioni divengono

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\partial R}{\partial \Theta}, \qquad \frac{d\Theta}{dr} = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}. \qquad (\mathrm{II})$$

Tale è il sistema ridotto, cui debbono soddisfare le funzioni $\vartheta(r)$, $\Theta(r)$ corrispondenti a una generica Σ.

Si avverta che anche per un'altra traiettoria qualsiasi (su cui soltanto non sia $\frac{dr}{dt}$ identicamente nulla e quindi r costante (*)) sono verificate le (II). Quel che di più si può asserire per le Σ e che, come vedremo, basta a caratterizzarle è la circostanza seguente: *ϑ e Θ sono soluzioni del sistema* (II) *regolari nell'intorno del valore $r = 0$* (questo valore al più escluso).

(*) Si riconosce facilmente che, in questo caso, deve rimanere costante anche ϑ, talchè P serba posizione invariata rispetto agli altri due corpi S, J. Si tratta dunque delle soluzioni particolari di LAPLACE (relative al problema ristretto).

§ 4. Trasformazione delle equazioni, che definiscono le traiettorie. Comportamento del sistema trasformato nel punto $\rho = 0$.

Poniamo

$$\rho = |\sqrt{r}|, \qquad \vartheta' = \frac{\Theta}{r^2} - 1 = \frac{\Theta}{\rho^4} - 1; \qquad H = -\rho R, \tag{11}$$

con che la espressione esplicita di H in variabili ρ, ϑ, ϑ' è, a norma della (10) e mettendo in evidenza il doppio segno del radicale,

$$H = -\rho R = \pm\sqrt{2\nu - 2C\rho^2 + 2\mu\rho^2 V - \rho^6 \vartheta'^2 + \rho^6}. \tag{12}$$

Si noti poi, confrontando colle (3), che la nuova variabile ϑ' non è che $\frac{d\vartheta}{dt}$ (velocità angolare relativa).

Avremo ovviamente

$$dr = 2\rho\, d\rho, \qquad \partial\Theta = \rho^4 \partial\vartheta',$$

e perciò il sistema (II) assume intanto l'aspetto

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = \frac{2}{\rho^4}\frac{\partial H}{\partial \vartheta'}, \qquad \frac{d\Theta}{d\rho} = -2\frac{\partial H}{\partial\vartheta}.$$

Essendo poi

$$\frac{d\vartheta'}{d\rho} = \frac{1}{\rho^4}\frac{d\Theta}{d\rho} - \frac{4}{\rho^5}\Theta = \frac{1}{\rho^4}\frac{d\Theta}{d\rho} - \frac{4}{\rho}(\vartheta' + 1),$$

il sistema trasformato in ρ, ϑ, ϑ' così si presenta:

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = \frac{2}{\rho^4}\frac{\partial H}{\partial\vartheta'} = -2\rho^2\frac{\vartheta'}{H},$$

$$\rho\frac{d\vartheta'}{d\rho} = -4(\vartheta'+1) - \frac{2}{\rho^3}\frac{\partial H}{\partial\vartheta} = -4(\vartheta'+1) - \frac{2\mu}{\rho H}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.$$

Teniamo conto del valore (5) di V, cioè

$$V = \frac{1}{\Delta} - r\cos\vartheta,$$

e notiamo che, derivando e scrivendo ρ^2 per r, risulta

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta\left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right).$$

Posto quindi per brevità

$$W = \operatorname{sen} \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right), \tag{13}$$

avremo in definitiva

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\rho} &= -2\rho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \\ \rho \frac{d\vartheta'}{d\rho} &= -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\rho \frac{W}{H}. \end{aligned}\right\} \tag{Σ}$$

Badando alle espressioni analitiche (12), (13) di H e di W, si constata immediatamente che, per valori finiti qualsivogliono di ϑ e di ϑ' e per ρ abbastanza piccolo, i secondi membri delle (Σ) sono funzioni regolari. La singolarità del sistema, relativa al valor zero della variabile indipendente ρ, proviene così esclusivamente dal fattore ρ, che compare nel primo membro della seconda equazione.

Esistenza di integrali olomorfi. Se $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$ è una soluzione olomorfa delle (Σ), $\vartheta'(\rho)$ deve necessariamente ridursi a -1 per $\rho = 0$. Basta, per accertarsene, porre $\rho = 0$ nella seconda delle (Σ).

Osservato questo, affermo che:

Teor. I. *Il sistema* (Σ) *ammette* ∞^1 *integrali olomorfi* $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$, *riducentisi, per* $\rho = 0$, ϑ *a un valore arbitrario* ϑ_0, ϑ' *a* -1.

La dimostrazione si fa agevolmente, ricorrendo al calcolo dei limiti di Cauchy.

In primo luogo $-2\rho^2 \frac{\vartheta'}{H}$, $-2\mu \frac{W}{H}$ possono ritenersi funzioni dei tre argomenti ρ, $\vartheta - \vartheta_0$, $\vartheta' + 1$, regolari nell'intorno del valore zero di ciascuno di essi. Sotto questo aspetto, esse vengono inoltre a dipendere dalla costante ϑ_0 e si presentano — importa notarlo — come funzioni periodiche di detta ϑ_0.

Dopo ciò si esaurisce in un momento la parte formale della dimostrazione, verificando che il sistema (Σ) è effettivamente atto a fornire, mediante successive derivazioni, i valori, per $\rho = 0$, delle derivate delle funzioni $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$, supposte olomorfe. Con questi valori, che riescono evidentemente periodici, rispetto a ϑ_0, si possono costruire le serie di Taylor, definienti gli integrali $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$.

Resta da provarne la convergenza.

Pongasi

$$|\vartheta - \vartheta_0| = \tau_1, \qquad |\vartheta' + 1| = \tau_2$$

e si indichino con $\mathfrak{M}_1(\rho, \tau_1, \tau_2)$, $\mathfrak{M}_2(\rho, \tau_1, \tau_2)$ due funzioni *maggioranti* di $-2\frac{\vartheta'}{H}$, $-2\mu\frac{W}{H}$ rispettivamente.

Basta confrontare il sistema (Σ), scritto per maggior chiarezza sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d(\vartheta - \vartheta_0)}{d\rho} = -2\rho^2\frac{\vartheta'}{H}, \\ &\rho\frac{d(\vartheta' + 1)}{d\rho} + 4(\vartheta' + 1) = -2\mu\rho\frac{W}{H}, \end{aligned}\right. \tag{Σ'}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\tau_1}{d\rho} = \rho^2\mathfrak{M}_1, \\ &\rho\frac{d\tau_2}{d\rho} + 4\tau_2 = \rho\,\mathfrak{M}_2, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

per riconoscere che quest'ultimo è un *sistema maggiorante.*

Tutto si riduce così a far vedere che il sistema (14) ammette una soluzione $\tau_1(\rho)$, $\tau_2(\rho)$, olomorfa e annullantesi per $\rho = 0$.

Si considerino a tale scopo i valori delle derivate di τ_1, τ_2, per $\rho = 0$. Essi vengono successivamente determinati dalle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^n\tau_1}{d\rho^n} = \frac{d^{n-1}(\rho^2\mathfrak{M}_1)}{d\rho^n}, \\ &(n+4)\frac{d^n\tau_2}{d\rho^n} = n\frac{d^n\mathfrak{M}_2}{d\rho^n} \end{aligned}\right. \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

che si ricavano derivando le (14) — la prima $n-1$ volte, la seconda n volte e facendo poi $\rho = 0$.

Maggioranti delle (15) sono evidentemente le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^n\tau_1}{d\rho^n} = \frac{d^{n-1}(\rho^2\mathfrak{M}_1)}{d\rho^n}, \\ &\frac{d^n\tau_2}{d\rho^n} = \frac{d^n\mathfrak{M}_2}{d\rho^n}. \end{aligned}\right.$$

Ma queste corrispondono al sistema

$$\frac{d\tau_1}{d\rho} = \rho^2\mathfrak{M}_1, \qquad \frac{d\tau_2}{d\rho} = \mathfrak{M}_2,$$

il quale si comporta regolarmente per $\rho = 0$ e rientra quindi nel teorema generale di esistenza, conosciuto sotto il nome di teorema di Briot e Bouquet. c. d. d.

Non esistenza di altri integrali. Le espressioni degli ∞^1 integrali olomorfi di (Σ) sono evidentemente della forma

$$\left.\begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 &= \rho\,\alpha(\rho, \vartheta_0), \\ \vartheta' + 1 &= \rho\,\beta(\rho, \vartheta_0), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

dove α e β designano funzioni di ρ e di ϑ_0, periodiche rispetto a ϑ_0 e regolari per ρ abbastanza piccolo.

Effettuiamo un cambiamento di variabili, nel sistema differenziale (Σ), sostituendo alle funzioni incognite ϑ e ϑ' due nuove funzioni ϑ_0, u, legate a ϑ, ϑ' dalle formule

$$\left.\begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 &= \rho\,\alpha(\rho, \vartheta_0), \\ \vartheta' + 1 &= \rho\,\beta(\rho, \vartheta_0) + u. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Queste definiscono un'effettiva trasformazione fra le due coppie ϑ, ϑ'; ϑ_0, u, regolare nell'intorno di $\rho = 0$, poichè il determinante funzionale $\begin{pmatrix} \vartheta & \vartheta' \\ \vartheta_0 & u \end{pmatrix}$ si riduce all'unità per $\rho = 0$.

La risoluzione, rispetto a ϑ_0, della prima equazione ci dà

$$\vartheta_0 = \vartheta + \rho\,\bar{\alpha}(\rho, \vartheta), \tag{18}$$

con $\bar{\alpha}$ funzione regolare per ρ abbastanza piccolo e periodica rispetto a ϑ. Quest'ultima asserzione richiede una parola di commento:

Dal confronto della (18) colla prima delle (17) si ricava

$$\bar{\alpha}(\rho, \vartheta) = -\alpha(\rho, \vartheta_0),$$

l'eguaglianza cambiandosi in identità se nei due membri si immagina tutto espresso per ρ, ϑ, ovvero per ρ, ϑ_0. Ciò posto, si osservi che, quando ϑ_0 si incrementa di 2π, anche $\vartheta_0 + \rho\,\alpha$, cioè ϑ, subisce un eguale incremento, α essendo funzione periodica.

Ne viene

$$\bar{\alpha}(\rho, \vartheta) = -\alpha(\rho, \vartheta_0) = -\alpha(\rho, \vartheta_0 + 2\pi) = \bar{\alpha}(\rho, \vartheta + 2\pi),$$

che mette appunto in evidenza la periodicità di $\bar{\alpha}$.

Portando nella seconda delle (17) il valore (18) di ϑ_0 e chiamando $f(\rho, \vartheta)$ la espressione, che ne risulta per β, si ottiene

$$u = \vartheta' + 1 - \rho f(\rho, \vartheta), \tag{19}$$

dove f si comporta evidentemente come α, è cioè funzione regolare di ρ, per ρ abbastanza piccolo, e periodica rispetto a ϑ.

Il sistema trasformato in ϑ_0, u si costruisce, derivando le (18), (19), il che dà

$$\frac{d\vartheta_0}{d\rho} = \frac{d\vartheta}{d\rho} + \frac{\partial(\rho\bar{\alpha})}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\rho},$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{d\vartheta'}{d\rho} - \frac{\partial(\rho f)}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\rho},$$

sostituendo per $\frac{d\vartheta}{d\rho}$, $\frac{d\vartheta'}{d\rho}$ i loro valori, forniti dalle (Σ) e immaginando poi espressi ϑ, ϑ' per ϑ_0, u, a norma delle (17). Si vede subito che il risultato è del tipo

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\vartheta_0}{d\rho} = \bar{a}, \\ &\rho\frac{du}{d\rho} = -4u + \rho\bar{b}, \end{aligned}\right.$$

con $\bar{a}$ e $\bar{b}$ funzioni periodiche di ϑ_0, regolari per qualsiasi valore finito di u e per ρ abbastanza piccolo.

In virtù delle (16) e (17), queste equazioni devono ammettere gli ∞^1 integrali particolari

$$\vartheta_0 = \text{cost.}, \qquad u = 0,$$

e ciò esige che i secondi membri si annullino (per qualsiasi valore di ρ e di ϑ_0), quando vi si fa $u = 0$.

Il sistema trasformato in ϑ_0, u può quindi essere scritto

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vartheta_0}{d\rho} = a\,u, \\ &\rho\frac{du}{d\rho} = (-4 + \rho\,b)\,u, \end{aligned}\right\} \tag{Σ''}$$

a e b designando ancora funzioni di ρ, u, ϑ_0, regolari per qualunque valore finito di u, purchè ρ sia abbastanza piccolo, e periodiche rispetto a ϑ_0.

È ora assai facile, imitando un ragionamento di BRIOT e BOUQUET (*), dimostrare il

Teor. II. *Oltre alle soluzioni olomorfe, il sistema* (Σ) *non ne ammette alcun'altra* (reale), *tale che, per* ρ *convergente a zero* (lungo l'asse reale, naturalmente), *si abbia*

$$\lim_{\rho=0} \vartheta'(\rho) = -1. \tag{20}$$

Sia $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$ una soluzione (reale), regolare per $\rho > 0$ e abbastanza piccolo. Quanto al comportamento per ρ convergente a zero, si faccia soltanto l'ipotesi (20).

Mediante le (18), (19), la $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$ dà luogo ad una soluzione $\vartheta_0(\rho)$, $u(\rho)$ delle (Σ''), regolare per $\rho > 0$ e tale che

$$\lim_{\rho=0} u(\rho) = 0. \tag{20'}$$

Gli integrali olomorfi delle (Σ) corrispondono, come già abbiamo notato, alle ∞^1 soluzioni delle (Σ''), per cui la funzione $u(\rho)$ si annulla identicamente (e $\vartheta_0 =$ cost.).

Ad escludere la esistenza di altri integrali (reali) delle (Σ), soddisfacenti alla (20), basterà constatare che le (Σ'') non possono ammettere alcuna soluzione (reale), per cui $u(\rho)$ verifichi la (20') senza essere identicamente nulla.

Sia, se possibile, $u(\rho)$, $\vartheta_0(\rho)$ una tale soluzione: ρ_0 un valore di ρ, in cui $u(\rho_0) = u_0$ non si annulla.

u non cresce indefinitamente, anzi converge a zero con ρ. Si può dunque scegliere ρ_0 abbastanza piccolo, perchè, per tutti i valori ρ, $u(\rho)$, $\vartheta_0(\rho)$, relativi all'intervallo (ρ_0, 0), estremi inclusi (**), la funzione

$$b(\rho, u(\rho), \vartheta_0(\rho))$$

resti finita e quindi (data la sua regolarità per $\rho > 0$) integrabile.

Ciò posto, indichiamo con v la funzione

$$\log(\rho^4 u),$$

con v_0 il valore finito $\log(\rho_0^4 u_0)$, che essa assume per $\rho = \rho_0$.

(*) Cfr. per es. PICARD, *Traité d'analyse.* Tom. III, pag. 27.

(**) È vero che non si sa niente del comportamento di $\vartheta_0(\rho)$ al convergere di ρ a zero, ma, come s'è avvertito, b è funzione periodica dell'argomento ϑ_0 e questo varia nel campo reale. La legittimità della conclusione è così manifesta.

Sarà, in virtù della (20'),

$$\lim_{\rho=0} v = -\infty.$$

D'altra parte la seconda delle (Σ''), dividendone entrambi i membri per ρu, diviene

$$\frac{d \log u}{d \rho} = -\frac{4}{\rho} + b,$$

ossia

$$\frac{d v}{d \rho} = b.$$

Integrando fra ρ_0 e ρ si ha

$$v = v_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} b\, d\rho,$$

e questa eguaglianza è assurda, poichè, al convergere di ρ a zero, il primo membro ha per limite $-\infty$, mentre il secondo resta finito.

c. d. d.

§ 5. Determinazione delle Σ. Traiettorie di collisione e traiettorie di eiezione. Relazione di simmetria.

Abbiamo visto a § 3 che, sopra una generica Σ, le variabili ϑ e Θ sono funzioni di r, regolari per r abbastanza piccolo (e > 0): abbiamo visto inoltre (lemmi a) e c) del § 2) che la funzione $\sigma = r^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)$ resta finita e che il limite inferiore del prodotto $r R^2$ rimane superiore a zero, anche quando r decresce indefinitamente.

Avendo riguardo alle (11), (12), se ne ricava:

1.° Una generica Σ corrisponde a soluzioni $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$ del sistema (Σ), regolari per ρ abbastanza piccolo (e > 0).

2.° Al convergere di ρ verso zero, la funzione $\sigma = \rho^3 \vartheta'$ resta finita e $|\rho R| = |H|$ non discende al disotto di un limite positivo assegnabile.

Ciò posto, ricordiamo che W è funzione di ρ, ϑ, regolare per ρ abbastanza piccolo e periodica rispetto a ϑ. Concluderemo ovviamente (pur non sapendo come si comportano $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$ al convergere di ρ verso 0) che, sopra una generica Σ, $\frac{W}{H}$ è funzione di ρ, finita e integrabile da un certo valore ρ_0 a zero.

Designando con M un'opportuna costante, potremo ritenere

$$\left| 2\mu \frac{W}{H} \right| < M.$$

Moltiplichiamo ora la seconda delle (Σ) per ρ^3. Se ne trae

$$\frac{d}{d\rho} \{ \rho^4 (\vartheta' + 1) \} = -2\mu\rho^4 \frac{W}{H},$$

donde, integrando fra ρ_0 e 0, ove si tenga presente che $\rho^3 \vartheta'$ resta finito e quindi $\lim_{\rho=0} \rho^4 \vartheta' = 0$,

$$\rho_0^4 \{ \vartheta'(\rho_0) + 1 \} = -\int_0^{\rho_0} 2\mu\rho^4 \frac{W}{H} d\rho.$$

Questa equazione può essere scritta

$$\vartheta'(\rho_0) + 1 = -\int_0^{\rho_0} 2\mu \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^4 \frac{W}{H} d\rho,$$

con che la funzione sotto il segno resta ancora minore di M in valore assoluto $\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right.$ è infatti < 1 in tutto l'intervallo di integrazione). L'integrale del secondo membro converge perciò a zero con ρ_0 e quindi

$$\lim_{\rho_0=0} \vartheta'(\rho_0) = -1.$$

Per le soluzioni Σ è dunque soddisfatta la condizione (20).

Se ne conclude, in base al secondo teorema del precedente paragrafo, che le Σ sono comprese fra gli ∞^1 integrali del sistema (Σ), olomorfi per $\rho = 0$.

Reciprocamente ciascun integrale olomorfo definisce una Σ.

Basterà provare che il movimento, corrispondente ad uno qualunque dei detti integrali, avviene in modo che, al convergere di t verso un valore

finito t_1, la r, o, ciò che è lo stesso, la ρ converge a zero. Ricordiamo a tale scopo che, integrato il sistema ridotto (II), la legge del moto si ha dalla equazione [prima delle (I')]

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial r}} = \frac{1}{R}.$$

Ciò è quanto dire, in virtù delle (11), (12), che, per ogni soluzione del sistema (Σ),

$$dt = -2\rho^2 \frac{d\rho}{H}.$$

La funzione $\frac{1}{H}$ resta finita al convergere di ρ a zero, anzi

$$\lim_{\rho=0} \frac{1}{H} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\nu}},$$

secondochè nella (12) si attribuisce al radicale il segno — o il segno +.

t converge dunque (crescendo o decrescendo secondo il segno adottato per il radicale) verso un valore finito, diciamo t_1, al convergere di ρ a zero.

In definitiva:

Le traiettorie singolari Σ, lungo le quali interviene un urto P, S, entro un tempo finito, corrispondono a tutte e sole le soluzioni del sistema (Σ), olomorfe per $\rho = 0$.

Se, nel sistema (Σ) stesso, si prende positivamente il radicale H, queste soluzioni olomorfe corrispondono ad urti futuri (traiettorie di collisione), se il radicale si prende negativamente, ad urti passati (traiettorie di eiezione).

Il sistema (Σ) possiede una notevole proprietà analitica. Esso rimane invariato se si scambiano contemporaneamente ϑ in $-\vartheta$ e H in $-H$. La verifica è immediata, ove si osservi che Δ, V e, per conseguenza, H sono funzioni pari di ϑ, W invece funzione dispari.

In virtù di tale proprietà, si ha manifestamente: *La simmetrica (rispetto alla retta SJ) di una traiettoria di collisione è traiettoria di eiezione e reciprocamente.*

§ 6. Discussione delle traiettorie singolari per $\mu = 0$.

Particolare interesse presentano le traiettorie singolari chiuse, le quali, per così dire, nascono e muoiono in S.

Ci occuperemo in questo paragrafo del caso elementare $\mu = 0$.

Così acquisteremo un'idea della natura della questione, procurandoci in pari tempo un fondamento prezioso, per affrontare a suo tempo il caso generale.

Per $\mu = 0$ (quando cioè la massa di J è nulla e quindi non influisce sul moto della coppia S, P), si è ricondotti al problema piano dei due corpi, anzi, siccome anche la massa di P è, per ipotesi, trascurabile, addirittura al moto di P attratto da un centro S fisso (o, ciò che è lo stesso, in modo rettilineo uniforme).

Le traiettorie singolari sono evidentemente le rette uscenti da P.

L'integrale delle forze vive (relativo al moto rettilineo di un punto attratto dall'origine in ragione inversa dei quadrati delle distanze)

$$\frac{1}{2} x'^2 = \frac{1}{x} + h \tag{21}$$

mostra, come si vede subito e come del resto è ben noto, che, se l'energia totale h è positiva, il moto non cambia senso: si va, o dal centro di forza all'infinito, o viceversa. Se invece l'energia totale h è negativa, il mobile non descrive tutta la retta, ma il solo segmento $0, -\frac{1}{h}$. Si tratta perciò di eiezione, seguita da collisione.

Le traiettorie singolari chiuse sono dunque i segmenti rettilinei con un estremo in S (contati due volte).

Questo, si intende bene, concerne il moto assoluto, riferito cioè ad un sistema di assi di direzione invariabile.

I caratteri del moto relativo, rispetto ad un sistema di assi ruotanti con SJ, o, ciò che è sostanzialmente la stessa cosa, rispetto alle nostre variabili ρ, ϑ, si ricavano, nel modo più comodo, dalle (Σ).

La seconda di esse, fattovi $\mu = 0$, dà (come unico integrale olomorfo nell'intorno di $\rho = 0$)

$$\vartheta' = -1.$$

La espressione (12) di H, ponendovi $\mu=0$ e quindi $\nu=1$, $\vartheta'=-1$, si riduce a

$$\pm\sqrt{2-2C\rho^2}$$

e la prima delle (Σ) corrispondentemente a

$$\frac{d\vartheta}{d\rho}=\pm\frac{2\rho^2}{\sqrt{2-2C\rho^2}}. \tag{22}$$

La espressione (6) di F mette in evidenza che, per $\mu=0$, $\nu=1$, $\vartheta'=-1$, la costante C di Jacobi non è che la $-h$ del moto assoluto rappresentato dalla (21). *Le traiettorie* (relative) *chiuse sono dunque definite dalla equazione differenziale* (22), *in cui si intenda C costante positiva.*

Quanto alle posizioni, effettivamente occupate dal mobile, sopra queste curve, è chiaro, per la natura del moto assoluto corrispondente, che si avranno tutte facendo crescere ρ da 0 a $\frac{1}{|\sqrt{C}|}$ e di là decrescere fino a zero. Nel periodo, in cui ρ cresce (eiezione) si deve prendere il radicale H negativamente e quindi nella (22) il segno —, nel secondo periodo invece (collisione) il segno +, conformemente alla regola enunciata in fine del precedente paragrafo.

Riconosciamo di qua che il $d\vartheta$ è sempre negativo (*). Detto perciò ϑ_0 il valore iniziale di ϑ (direzione della tangente in S all'arco di eiezione), il raggio vettore descriverà l'intera curva ruotando sempre nello stesso senso (negativo), a partire dall'azimut ϑ_0, attorno ad S. L'azimut d'arrivo (direzione della tangente all'arco di collisione) sarà ϑ_0 — una certa costante 2Ω, che valuteremo tra un momento.

Ciò ritenuto, passiamo alla integrazione effettiva della (22).

Conviene porre

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{sen}\frac{w}{2}, \tag{23}$$

con che

$$\pm\sqrt{2-2C\rho^2}=\sqrt{2}\cos\frac{w}{2},$$

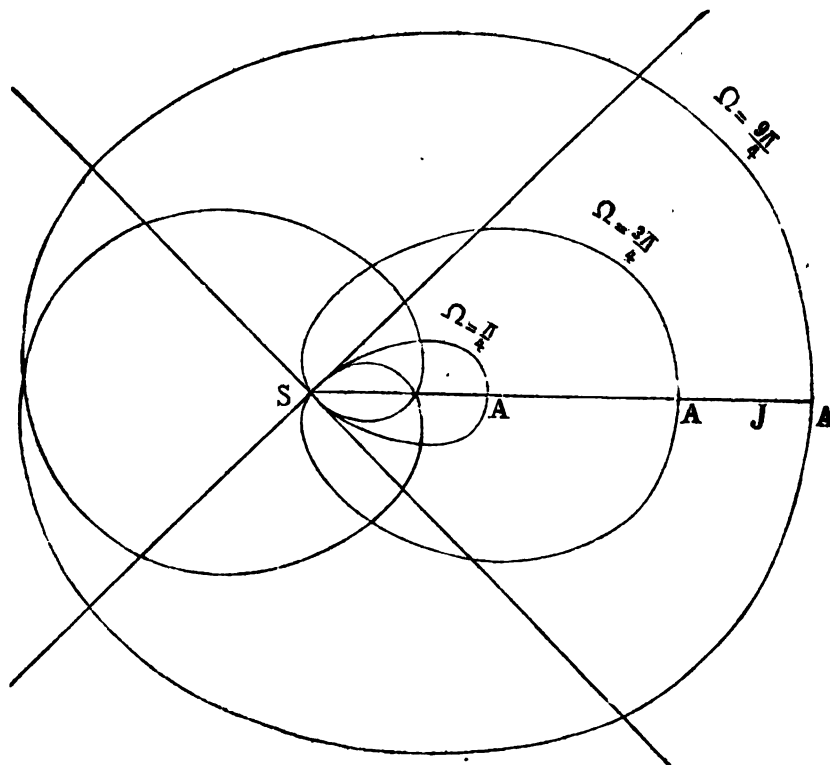
$$d\rho=\frac{1}{2\sqrt{C}}\cos\frac{w}{2}\,dw$$

(intendendo i radicali presi in valore aritmetico).

(*) Cosa a priori evidente, poichè la traiettoria assoluta è rettilinea e qui la si considera rispetto ad assi ruotanti nel senso positivo (delle ϑ crescenti).

Per far crescere ρ da 0 a $\frac{1}{\sqrt{C}}$ e poi decrescere fino a zero, basta far variare w da 0 a 2π.

Da 0 a π, $\cos\frac{w}{2}$ è positivo; negativo invece fra π e 2π. Si attribuisce perciò al radicale il debito segno sostituendolo con $-\sqrt{2}\cos\frac{w}{2}$.



La (22), così trasformata, diviene

$$-(2\,C)^{\frac{3}{2}}\,d\,\vartheta=2\,\mathrm{sen}^2\frac{w}{2}\,d\,w=(1-\cos w)\,d\,w,$$

e, integrata, dà

$$w-\mathrm{sen}\,w=-\zeta, \tag{22'}$$

ove ho posto per brevità

$$\zeta=(2\,C)^{\frac{3}{2}}(\vartheta-\vartheta_0). \tag{24}$$

La (22′) mostra che, mentre w varia da 0 a 2π, mentre cioè si descrive l'intera traiettoria, ζ si incrementa di -2π, quindi, a norma della (24), ϑ di $-\frac{2\pi}{(2C)^{\frac{3}{2}}}\cdot$ L'angolo 2Ω delle due tangenti in S è dunque

$$2\Omega = \frac{2\pi}{(2C)^{\frac{3}{2}}}\cdot \tag{25}$$

Si vede immediatamente che la curva è simmetrica rispetto alla bisettrice SA di quest'angolo (retta d'azimut $\vartheta_0 - \Omega$), ossia che a valori di ϑ aventi per somma $2\vartheta_0 - 2\Omega$ corrispondono eguali valori di ρ. E, per verità, se due valori di ϑ hanno per somma $2\vartheta_0 - 2\Omega$, i valori corrispondenti di ζ hanno per somma 2π. Ma valori di ζ aventi per somma 2π determinano, a norma della (22′), valori di w aventi pure per somma 2π, quindi valori supplementari di $\frac{w}{2}$; dunque, per la (23), valori eguali di ρ, giusta l'asserto.

La (22′) è caso limite della equazione di Kepler. Essa ammette una sola radice reale w, che si riduce a zero per $\zeta = 0$. Ogni funzione trigonometrica di questa radice, in particolare $\cos w$, si può sviluppare in serie trigonometrica dell'argomento ζ.

Lo sviluppo di $\cos w$ si ha subito, particolarizzando formule note (*), ed è

$$\cos w = -\frac{1}{2} + \sum_1^\infty{}_n \frac{2}{n} s_n \cos n\zeta,$$

con

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} n(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Dalla (23), elevando al quadrato, si ha infine l'equazione polare delle traiettorie in questione

$$r = \frac{1}{C}\operatorname{sen}^2\frac{w}{2} = \frac{1}{2C}(1-\cos w) = \frac{1}{2C}\left\{\frac{3}{2} - \sum_1^\infty{}_n \frac{2}{n} s_n \cos n\zeta\right\}\cdot \tag{22''}$$

Il loro comportamento qualitativo dipende dal valore di Ω (veggasi la figura, dove la bisettrice SA è presa nella direzione SJ, particolarizzazione, che non ha alcuna influenza sulla forma delle curve). Se Ω non supera π,

(*) Cfr. Tisserand, *Mécanique céleste.* Tom. I, Cap. XIII.

esse si chiudono semplicemente in S; se Ω supera π, esse si chiudono dopo tanti avvolgimenti attorno ad S, quant'è la parte intera del quoziente $\frac{\Omega}{\pi}$.

Il valore di Ω dipende da quello adottato per C, o, se si vuole, per la *distanza afelia* $\overline{SA} = \frac{1}{C}$, a norma della (25). Essa esprime (terza legge di Kepler applicata alle nostre traiettorie) che i quadrati delle ampiezze angolari 2Ω stanno fra loro come i cubi delle distanze afelie.

Si noti da ultimo, osservando la (23), che, per $C > 1$, la distanza $\overline{SP} = \rho^2$ rimane costantemente inferiore all'unità, talchè in particolare nessuna traiettoria va allora a passare per il punto J.

§ 7. Relazione invariante caratteristica dell'urto.

A quale condizione debbono soddisfare in un generico istante gli elementi determinativi del moto (posizione e velocità di P) perchè, a partire da essi, intervenga un urto entro un tempo finito?

La posizione e la velocità di P sono individuate dai valori di ρ, ϑ, ϑ' e dalla costante C di Jacobi, che sostituisce, o, se si vuole anche, costituisce il quarto parametro.

Si tratterà, lasciando di mettere in evidenza la costante C, di riconoscere a quale condizione debbono soddisfare ρ, ϑ, ϑ' per appartenere ad una delle traiettorie singolari, lungo le quali interviene un urto P, S, per appartenere cioè ad una Σ.

Tutto si riduce dunque ad esprimere che ρ, ϑ, ϑ' sono valori assunti lungo una Σ, ossia, per quanto s'è visto a § 5, valori, che rientrano nell'insieme definito dalle (16).

Così stando le cose, la condizione cercata si ha subito eliminando ϑ_0 tra le (16).

Di questa eliminazione ci siamo già implicitamente occupati a § 4. Ed ecco come.

La (19) è — si può dire — il risultato della eliminazione di ϑ_0 fra le (17). Le (16) si ottengono dalle (17) ponendovi $u = 0$. Non c'è che da porre $u = 0$ nella (19), perchè essa ci rappresenti il risultato della eliminazione di ϑ_0 fra le (16).

La relazione caratteristica dell'urto è dunque

$$\vartheta' + 1 = \rho f(\rho, \vartheta). \qquad \text{(III)}$$

La f si comporta regolarmente per ρ abbastanza piccolo ed è funzione periodica di ϑ. Appunto per questa periodicità rapporto al parametro angolare ϑ, *la* (III) *è uniforme nel senso di* Poincaré.

Resta la effettiva determinazione della funzione $f(\rho, \vartheta)$. Il procedimento, che ci ha condotti a definire la (III) come risultato della eliminazione di ϑ_0 fra le (16), potrebbe a rigore applicarsi anche per il calcolo quantitativo.

Infatti il teorema di esistenza (Teor. I del § 4) insegna a costruire (come serie di potenze di ρ) le funzioni α e β, e l'eliminazione di ϑ_0 è pure un'operazione effettuabile, secondo i principi della teoria delle serie di potenze, e permetterebbe di calcolare uno dopo l'altro i coefficienti dello sviluppo di f in serie di potenze di ρ.

Questo scopo si può però raggiungere in modo più spedito, come si esporrà nel seguente paragrafo.

Osservazione. Interpretando altrimenti le lettere (cfr. § 3), la (III) può anche risguardarsi come condizione caratteristica di un urto P, J. Consideriamola in questa accezione, immaginiamo di esprimervi tutto per le nostre variabili ρ, ϑ, ϑ', e rappresentiamola brevemente con

$$u' = 0.$$

Rappresentiamo poi la (III) (come sostanzialmente abbiamo già avuto occasione di fare a § 4) con

$$u = 0.$$

Evidentemente

$$u\,u' = 0 \qquad \text{(IV)}$$

è la condizione generica di un urto, passato o futuro, di P con uno degli altri due corpi.

La disuguaglianza

$$u\,u' \gtrless 0$$

assicura dunque la prosecuzione indefinita (passata e futura) del movimento di P.

§ 8. Calcolo della funzione f.

La relazione (III) è invariante pel suo significato: essa abbraccia tutte e sole le Σ; è quindi una varietà (dello spazio analitico ρ, ϑ, ϑ') costituita interamente da traiettorie del sistema differenziale (Σ).

Ne viene che la (III) seguita ad essere soddisfatta, quando ci si sposta lungo le Σ, cioè, con linguaggio analitico, quando la si deriva rispetto a ρ, tenendo conto delle (Σ) (e di essa stessa naturalmente).

Avremo così

$$\frac{d\vartheta'}{d\rho} = \frac{\partial(\rho f)}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\rho},$$

ossia

$$\frac{1}{\rho}\left\{-4(\vartheta'+1) - 2\mu\rho\frac{W}{H}\right\} = \frac{\partial(\rho f)}{\partial\rho} - 2\rho^3\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\frac{\vartheta'}{H},$$

la quale deve sussistere identicamente, quando si introduca dappertutto, al posto di ϑ', il suo valore (III): $-(1-\rho f)$.

Posto, per maggior chiarezza,

$$\mathfrak{H} = (H)_{\vartheta'=-(1-\rho f)} = \pm\sqrt{2\nu - 2C\rho^2 + 2\mu\rho^2 V - \rho^6(1-\rho f)^2 + \rho^6}, \tag{26}$$

il risultato della indicata sostituzione si potrà presentare sotto la forma

$$5f + \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} = -2\mu\frac{W}{\mathfrak{H}} - \frac{2}{\mathfrak{H}}\rho^3(1-\rho f)\frac{\partial f}{\partial\vartheta}. \tag{27}$$

La cercata funzione f è dunque un integrale di questa equazione a derivate parziali, la quale si presta nel modo migliore alla determinazione effettiva. Basta tener presente la sviluppabilità di f in serie di potenze di ρ e porre di conformità

$$f = \sum_0^\infty{}_m f_m\rho^m. \tag{28}$$

La (27) permette di calcolare successivamente i coefficienti f_m dello sviluppo. Per accertarlo, si noti che, nel secondo membro, la f compare pel tramite dei prodotti ρf, $\rho\frac{\partial f}{\partial\vartheta}$, di modo che, se si deriva n volte e si pone poi $\rho=0$, il secondo membro dipende soltanto da $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ (e loro derivate rispetto a ϑ).

Nel primo membro viene invece

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(5f + \rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\sum_0^\infty {}_m (5+m) f_m \rho^m,$$

donde, per $\rho = 0$,

$$n!\,(5+n)\,f_n.$$

Così rimane univocamente determinato f_n in funzione dei coefficienti, che lo precedono. In particolare la (27) stessa dà, per $\rho = 0$,

$$5 f_0 = -2\mu\left(\frac{W}{\mathfrak{S}}\right)_{\rho=0} = 0.$$

come risulta subito dalle (13) e (26). Tutte le f_n si potranno dunque valutare, l'una dopo l'altra, nel modo indicato, o, ciò che è lo stesso, introducendo per f lo sviluppo (28) ed eguagliando nei due membri della (27) i coefficienti delle stesse potenze di ρ.

Per $\mu = 0$, si ha in particolare

$$f = 0.$$

Infatti questo valore verifica la (27) (fattovi $\mu = 0$), ed è il solo, perchè (come abbiamo visto in generale, qualunque sia μ) i coefficienti dello sviluppo (28) sono univocamente determinati.

La condizione (III) dell'urto si riduce allora a

$$\vartheta' + 1 = 0,$$

risultato ovviamente prevedibile, il quale esprime che la velocità angolare (assoluta) di P, rispetto ad S, è nulla, ossia che la velocità di P è diretta secondo la retta PS.

Tornando al caso generale di μ qualunque, facciamo il calcolo dei primi termini dello sviluppo (28).

Anzitutto, da

$$\Delta^2 = 1 - 2r\cos\vartheta + r^2 = 1 - 2\rho^2\cos\vartheta + \rho^4,$$

si trae

$$\Delta^{-1} = 1 + \rho^2\cos\vartheta + \mathbf{4},$$

$$\Delta^{-3} = 1 + 3\rho^2\cos\vartheta + \frac{3}{2}(-1 + 5\cos^2\vartheta)\rho^4 + \mathbf{6},$$

designando genericamente con $\mathbf{k}$ una espressione d'ordine k in ρ.

Si ha poi

$$V = \frac{1}{\Delta} - \rho^2 \cos \vartheta = 1 + \mathbf{4},$$

$$W = \operatorname{sen} \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right) = -\frac{3}{2} \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \,\{ 2 \cos \vartheta + (-1 + 5 \cos^2 \vartheta) \rho^2 + \mathbf{4} \},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{H}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left\{ 1 + \frac{C-\mu}{2\nu} \rho^2 + \mathbf{4} \right\},$$

$$-2\mu \frac{W}{\mathfrak{H}} = \pm \frac{3\mu}{\sqrt{2\nu}} \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \left\{ 2 \cos \vartheta + \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right) \rho^2 + \mathbf{4} \right\}.$$

Di qua apparisce che il secondo membro della (27) contiene ρ^2 a fattore. Devono dunque annullarsi f_0 ed f_1, e conviene, per il calcolo dei coefficienti successivi, prendere f sotto la forma

$$f = \rho^2 \psi = \rho^2 \sum_0^\infty {}_m \psi_m \rho^m, \tag{28'}$$

donde

$$5f + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} = \rho^2 \left(7\psi + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = \rho^2 \sum_0^\infty {}_m (m + 7) \psi_m \rho^m.$$

Portiamo per f la espressione (28') anche nel secondo membro della (27); sopprimiamo da una parte e dall'altra il fattore ρ^2 e scriviamo sviluppatamente. Risulta

$$7\psi_0 + 8\psi_1 \rho + 9\psi_2 \rho^2 + 10\psi_3 \rho^3 + \mathbf{4} =$$

$$\pm \frac{3\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} \vartheta \left\{ 2 \cos \vartheta + \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right) \rho^2 + \mathbf{4} \right\} \mp$$

$$\mp \frac{2}{\sqrt{2\nu}} \rho^3 \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} + \mathbf{4},$$

e il confronto dei coefficienti delle potenze di ρ, fino alla terza, porge

$$\psi_0 = \pm \frac{3}{7} \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} 2\vartheta,$$

$$\psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 = \pm \frac{1}{3} \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} \vartheta \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right),$$

$$\psi_3 = \mp \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{35} \frac{\mu}{\nu} \cos 2\vartheta.$$

La espressione di f, fino al quint'ordine è dunque

$$f = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \rho^2 \left\{ \frac{3}{7} \operatorname{sen} 2\vartheta + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \vartheta \left(-1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right) \rho^2 \mp \mp \frac{3}{35} \frac{2}{\sqrt{2\nu}} \cos 2\vartheta \rho^3 + \cdots \right\}, \tag{29}$$

dove (ricordando la regola del § 5 e intendendo per $\sqrt{2\nu}$ il valore aritmetico del radicale) *dovremo prendere i segni superiori, se si tratta di urti futuri, gli inferiori, se si tratta di urti passati.*

I termini effettivamente calcolati nella (23) bastano a fornire un'espressione approssimata di f, valida, per ρ abbastanza piccolo, qualunque sia ϑ. Essi permettono in particolare di seguire l'andamento delle curve

$$f = \text{cost.}$$

in un intorno abbastanza piccolo di S.

Si noti che, per $\vartheta = 0$, il primo coefficiente, che non si annulla, è precisamente quello di ρ^5. Tutti i termini calcolati sono dunque necessari per la rappresentazione approssimata (per poter asserire che, di fronte ad essi, i successivi sono trascurabili in un intorno abbastanza piccolo di $\rho = 0$, qualunque sia ϑ).

La determinazione di f è esauriente per ρ abbastanza piccolo. A definire la funzione in tutto il suo campo di esistenza, basta teoricamente il prolungamento analitico. Ma sarebbe desiderabile di precisare il campo di validità dello sviluppo (28); e più generalmente di riconoscere i caratteri della funzione f e il modo di calcolarla effettivamente per qualunque valore di ρ. Rispetto alla prima questione, non sarà forse superfluo osservare che, applicando il metodo dei limiti alla equazione (27), si può facilmente assegnare *un* valore di ρ (se non il vero raggio di convergenza), al disotto del quale lo sviluppo (28) di f è certo convergente.

§ 9. Traiettorie singolari chiuse per i piccoli valori di μ.

Nel caso speciale $\mu = 0$ (§ 6) le traiettorie singolari, corrispondenti a valori positivi della costante C di Jacobi, sono tutte curve chiuse.

Quale sarà il comportamento delle analoghe Σ per μ qualunque? Si può

dimostrare che, almeno per μ abbastanza piccolo e $C > 1$, la proprietà seguita a sussistere.

A questo scopo, riprendiamo per un momento a considerare il sistema differenziale (Σ), risguardandovi la costante μ come un parametro (e $\nu = 1 - \mu$).

Lo stesso metodo dei limiti, che ha servito a stabilire il teorema di esistenza, mostra (*) che gli ∞^1 integrali olomorfi $\vartheta(\rho)$, $\vartheta'(\rho)$ sono, in un certo intorno E di $\rho = 0$, funzioni regolari di μ, per $\mu < 1$, e in particolare per μ abbastanza piccolo.

Ciò ritenuto, conveniamo di designare con $\bar{\Sigma}_\mu$ una qualunque delle ∞^1 Σ, che corrispondono a un dato valore di μ e a un valore, pur dato e maggiore dell'unità, della costante C di Jacobi.

Fissiamo una generica $\bar{\Sigma}_0$ e la $\bar{\Sigma}_\mu$ uscente da S sotto lo stesso angolo ϑ_0.

Sia E' un generico intorno di S, interno ad E.

La $\bar{\Sigma}_0$, essendo chiusa, rientra manifestamente in E' (e quindi in E), dopo un certo percorso finito [e non nullo, perchè ogni $\bar{\Sigma}_0$ contiene anche un punto — $\rho = \frac{1}{|\sqrt{C}|}$ —, in cui H si annulla e che non può quindi appartenere al campo E di regolarità del sistema differenziale (Σ)].

Dico che anche $\bar{\Sigma}_\mu$ rientra E, dopo un percorso finito, purchè μ differisca abbastanza poco dallo zero.

La giustificazione di tale asserto non va cercata nelle equazioni (Σ), il cui comportamento, fuori di E, non è sempre regolare (il denominatore H può benissimo annullarsi), ma nelle equazioni originarie (I), in cui t è la variabile indipendente. Da quando $\bar{\Sigma}_0$ esce a quando rientra in E' passa un tempo finito; in questo intervallo la $\bar{\Sigma}_0$ resta sempre a distanza finita, non solo da S, ma anche, per essere $C > 1$ (cfr. § 6) dall'altro punto singolare J. Si può dunque essere certi, per un teorema fondamentale del sig. Poincaré (**), che, se il parametro μ è abbastanza piccolo, $\bar{\Sigma}_\mu$ si mantiene vicina a $\bar{\Sigma}_0$ tanto quanto si vuole; così vicina in particolare che, quando $\bar{\Sigma}_0$ rientra in E', la posizione sincrona di $\bar{\Sigma}_\mu$ appartenga ad E.

Adesso è facile constatare che $\bar{\Sigma}_\mu$ va proprio a terminare in S.

Immaginiamo infatti di partirci da S e di seguire $\bar{\Sigma}_\mu$ nel suo percorso. In partenza, si ha a fare con una traiettoria di eiezione. Sopra di essa, sarà

(*) Cfr. Poincaré, *Mécanique céleste*. Tom. I, n.[i] 23-26.
(**) Loco citato, n.° 27.

di conseguenza soddisfatta la (III), il radicale $\sqrt{2\nu}$ dello sviluppo di f [come l'H delle (Σ)] andando preso negativamente.

La (III), o meglio la sua continuazione analitica, seguita ad essere soddisfatta lungo tutta la curva.

Quale può essere la continuazione analitica della (III), quando $\overline{\Sigma}_\mu$ rientra in E?

La circostanza che la funzione f verifica la (27) mostra che in E sono possibili per f, e quindi per la (III), due sole determinazioni, corrispondenti al doppio segno del radicale. Nell'uscire da E il radicale andava preso negativamente; nel rientrare lo si dovrà invece prendere positivamente, poichè questo accade sopra la traiettoria vicinissima $\overline{\Sigma}_0$.

La $\overline{\Sigma}_\mu$ rientra dunque in E coi caratteri di traiettoria di collisione.

c. d. d.

Parmi ben probabile che, al di là di un certo valore della costante di Jacobi, le Σ seguitino ad essere curve chiuse, per qualunque valore di μ (e non soltanto per μ abbastanza piccolo). Non sono però riescito a dimostrarlo rigorosamente.

Padova, febbraio 1903.

Sugli spazii a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

(Di Guido Fubini, *a Catania.)*

Nella Memoria: *Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti* (Annali di Matematica, 1902), ho determinato tutti gli spazii a quattro dimensioni che ammettono un gruppo a tre o a quattro parametri; vogliamo ora trovare tutti gli spazii a 4 dimensioni che ammettono un gruppo più ampio. Anzitutto dovremmo determinare quali tra gli S_4 già determinati ammettono il gruppo corrispondente soltanto come sottogruppo del gruppo totale corrispondente di movimenti. La ricerca, affrontata direttamente, presenta tali difficoltà di calcolo, che è assai difficile condurla a buon termine. È più facile, seguendo i metodi svolti dal prof. Bianchi per gli spazii a tre dimensioni con un gruppo di movimenti, studiare soltanto che cosa avviene degli S_4 in discorso per valori generici delle costanti, che compariscono nell'elemento lineare. I calcoli risultano però ancora lunghi, e senza interesse. E si troverebbe che tutti gli S_4 che ammettono un S_4 integrabile non ammettono mai un gruppo più ampio, eccetto che gli spazii che ammettono il gruppo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

che sono euclidei, e gli spazii che ammettono il gruppo generato dalle

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1,\ 2,\ 3), \qquad x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

il cui elemento lineare è riducibile alla forma:

$$d s^2 = d x_4^2 + d x_1^2 + d x_2^2 + 2 h_{12} \, d x_1 \, d x_2 + 2 x_4 \, d x_2 \, d x_3 + \\ + 2 (h_{12} x_4 + h_{13}) \, d x_1 \, d x_3 \, (x_4^2 + h_{33}) \, d x_3^2$$

dove le « h » sono costanti. Indicando con $H = h_{33} - h_{33}\, h_{12}^2 - h_{13}^2$ il discriminante non nullo della forma, si riconosce agevolmente che questi spazii ammettono anche la trasformazione infinitesima:

$$h_{13} x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\left(\frac{1 - h_{12}^2}{2} x_4^2 - h_{12}\, h_{13}\, x_4 \right) - \frac{x_3^2}{2} H \right] \frac{\partial}{\partial x_2} -$$
$$- (1 - h_{12}^2)\, x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + H x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \cdot$$

Non ha per noi alcun interesse il riprodurre qui i calcoli che dimostrano non esservi negli altri casi un gruppo più ampio per valori generici delle costanti, tanto più p. es. che lo studio diretto di questa questione per gli S_4 che ammettono un G_4 non integrabile non pare certo semplice. E noi non parleremo qui di questa questione, che è del resto implicitamente risoluta nelle pagine seguenti, dove si trovano tutti i tipi possibili di spazii S_4 che ammettono un gruppo a più di quattro parametri. E nelle ultime pagine del presente lavoro, indicherò sommariamente come il problema in discorso si risolve per gli S_4, che ammettono un G_4 non integrabile, che è il caso più difficile ad essere affrontato direttamente.

L'idea fondamentale che ci guiderà alla ricerca degli spazii a 4 dimensioni con un gruppo a più di quattro parametri è quella di ricercare a priori una proprietà generale di questi gruppi, che noi troveremo senz'altro nelle prime pagine. Dopo questo, la ricerca diventa non troppo complicata; e si hanno calcoli semplici e uniformi, mentre ineseguibili sarebbero stati i calcoli, che ci potevano suggerire i metodi generali o la generalizzazione dei metodi del prof. Bianchi. Ed è senza dubbio soltanto per questa via che si potranno ottenere risultati generali in questo ordine di ricerche: si dovrà cioè prima studiare le proprietà dei gruppi di movimenti, per poi passare allo studio degli spazii che li ammettono.

Suppongo nel lettore la conoscenza della mia Memoria citata, che indicherò con (A) e, per brevità, trascuro dapprima, come ho già fatto nella mia Mem. cit., il caso ben più facile e breve a trattarsi di quegli S_4 che ammettono un G_4 intransitivo, le cui varietà V_3 invarianti sono a curvatura costante, senza ammettere il G_6 intransitivo corrispondente, e senza essere di uno dei tipi che ora determineremo.

§ 1. Noi dimostreremo il teorema seguente:

Se un G_r ($r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) è un gruppo di movimenti di un S_4 esso ammette un sottogruppo a « $r - 1$ » parametri.

(È ben chiaro che è inutile occuparci del caso $r = 9$ e del caso $r = 10$, perchè lo S_4 o non esisterebbe o sarebbe a curvatura costante).

Questo teorema è evidente per $r = 1, 2, 3, 4, 5$ per noti teoremi generali della teoria dei gruppi. Se $r = 6$, il G_r ammette certo qualche G_4 (Lie-Engel, 3° B, pag. 756) e deve certo ammettere anche qualche G_5 perchè se un G_r ha dei sottogruppi G_{r-2}, ma non dei sottogruppi G_{r-1}, è (Lie-Engel, 3° B, 691) $r \geqq 8$ e quindi $r \neq 6$. Se $r = 7$, il G_r ammette certo qualche G_4; se non ammettesse nè sottogruppi G_5, nè sottogruppi G_6 dovrebbe essere (Lie, loc. cit.) $r \geqq 10$ e quindi $r \neq 7$. Se ammettesse dei G_5 ma non dei G_6, allora dovrebbe essere $r \geqq 8$ e quindi $r \neq 7$. Veniamo al caso dei G_8; consideriamo quel sottogruppo G_4 che lascia fisso un punto generico dello S_4. Esso non è certamente un gruppo invariante; perchè dalle trasformazioni di G_8, che sarà certamente transitivo, è portato negli altri G_4 corrispondenti agli altri ∞^4 punti di S_4. Tutti questi G_4 non possono avere alcuna trasformazione infinitesima comune (ossia invariante in G_8) perchè nessuna trasformazione di G_8, oltre l'identità, può lasciar fisso ogni punto di S_4.

Ora (Lie-Engel; Tomo III°, pag. 776 e 682) di G_8 semplici non vi sono altro che i gruppi oloedricamente isomorfi al gruppo proiettivo del piano. Escluso per un momento questo caso, il gruppo G_8 conterrà qualche sottogruppo invariante. Se questo sottogruppo è un G_1, o un G_2, o un G_3 esso insieme a uno dei G_4 precedenti, in cui come si disse non può essere contenuto come sottogruppo genererà un G_5 oppure un G_6 oppure un G_7. Nel primo caso il G_8, contenendo un G_5 dovrà pure (Lie-Engel, T. 3.°, pag. 691) contenere un G_6 o un G_7. Se poi G_8 contiene un G_6, non essendo esso per ipotesi isomorfo al gruppo proiettivo del piano, esso conterrà pure un G_7 (Lie, loc. cit.). Se il sottogruppo invariante fosse un G_4, questo G_4 con una qualsiasi altra trasformazione infinitesima di G_8 genererebbe un G_5. In ogni caso adunque il nostro G_8 conterrebbe un G_5 o un G_6 oppure un G_7 e quindi, per le considerazioni precedenti, conterrebbe un G_7. Basterà adunque far vedere che il nostro G_8 non può essere isomorfo al gruppo proiettivo del piano. Infatti un gruppo G_8 che si possa considerare come gruppo di movimenti di un S_4 ammette dei G_4 che lasciano fisso un punto di S_4. La composizione di un tale G_4 si ha subito, ricordando che per le proprietà caratteristiche dei gruppi di movimenti esso deve essere isomorfo a un sottogruppo di uno spazio S_3 a curvatura costante e che essendo esso intransitivo (*), deve essere isomorfo (Cfr. § 1 della mia Mem. cit.) a un gruppo Γ_4 transitivo di movi-

(*) Perchè, come ho dimostrato, nella mia Memoria, nessun gruppo di movimenti può essere doppiamente transitivo.

menti di un S_3. Confrontando le possibili composizioni dei sottogruppi *reali* G_4 di movimenti di uno spazio ellittico (Lie-Engel, Tomo III°, pag. 203) e le possibili composizioni di un G_4 transitivo di movimenti di un S_3, troviamo che questo G_4 deve avere per gruppo derivato un G_3 non integrabile. Di tali G_4 il gruppo proiettivo del piano contiene soltanto (Lie, B^nd 3tes, pag. 106) il sottogruppo generato dalle

$$xp,\ xq,\ yp,\ yq$$

e i sottogruppi equivalenti.

Ma il sottogruppo in discorso è contenuto nel gruppo G_6

$$p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq.$$

Dunque: Se uno dei nostri spazii S_4 ammette un G_8 oloedricamente isomorfo al gruppo proiettivo del piano, esso ammette un gruppo G_4 intransitivo non integrabile, le cui varietà minime invarianti sono perciò delle V_3; e questo G_4 è contenuto in un sottogruppo a 6 parametri di G_8.

Più tardi studieremo quali spazii S_4 ammettono un gruppo G_6 contenente come sottogruppo un G_4 intransitivo non integrabile: e vedremo che nessuno di tali spazii può mai ammettere un G_8. Il teorema resta così completamente dimostrato.

Dunque per la nostra ricerca basterà prima cercare quale degli spazii trovati nella mia Mem. cit. ammettono un G_5 contenente il G_4 corrispondente poi quale di questi ammette un G_6 contenente il G_5 relativo, quale fra questi ultimi ammettono un G_7 contenente il G_6 relativo. Per trovare quali spazii ammettono un G_8 basterà ridurci allo studio degli spazii che ammettono un G_7 e di quelli che ammettono un G_6 contenente come sottogruppo un G_4 intransitivo non integrabile.

§ 2. Cominciamo dunque ora dallo studiare quali dei nostri spazii può ammettere un G_5: noi distingueremo tre casi, che studieremo l'uno dopo l'altro.

A) Il G_5 è integrabile, e non contiene alcun G_4 intransitivo.

B) Il G_5 non è integrabile, e non contiene alcun G_4 intransitivo.

C) Il G_5 contiene come sottogruppo un G_4 intransitivo.

Studiamo il primo caso, osservando che un tale G_5 possiede naturalmente solo dei sottogruppi integrabili.

A) Il gruppo G_5 ha un G_4 come gruppo derivato. (Si ricordi che è chiaramente da trascurarsi il caso, in cui il G_5 avesse tra i suoi sottogruppi un G_4 a trasformazioni permutabili, nel qual caso lo spazio ambiente sarebbe

senz'altro euclideo; ed è quindi « a fortiori » inutile occuparci di un G_5 a trasformazioni permutabili.) Sia G_1 il derivato generato dalla X_1; potremo scegliere le trasform. infinit. $(X_1 \dots X_5)$ generatrici di G_5 evidentemente in modo che sia

$$(X_1 X_2) = 0 \ (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0$$

e poichè $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ non può essere a trasformazioni permutabili, una almeno delle $(X_2 X_3)$, $(X_3 X_4)$, $(X_2 X_4)$ non sarà nulla; e potremo porre p. es.:

$$(X_2 X_3) = X_1 .$$

Ponendo $X_4 - p X_2 - q X_3$ al posto di X_4 con p, q costante opportune potremo poi fare:

$$(X_3 X_4) = (X_2 X_4) = 0.$$

Sarà poi, indicando con ε_i delle costanti,

$$(X_1 X_5) = \varepsilon_1 X_1 \quad (X_2 X_5) = \varepsilon_2 X_1 \quad (X_3 X_5) = \varepsilon_3 X_1 \quad (X_4 X_5) = \varepsilon_4 X_1$$

dove ε_1, ε_3, ε_4 non possono essere tutte nulle, perchè altrimenti $(X_1 X_3 X_4 X_5)$ sarebbe un Γ_4 (*); e così pure neppure ε_1, ε_2, ε_4 possono essere tutte nulle.

Se $\varepsilon_1 \neq 0$, togliendo da X_2, X_3, X_4 multipli di X_1 si ottiene $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$.

Se $\varepsilon_4 \neq 0$, $\varepsilon_1 = 0$, togliendo da $X_2 X_3$ multipli di X_4 si ottiene $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 0$.

Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 0$, allora $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$. E togliendo da X un conveniente multiplo di X_3 si ottiene: $\varepsilon_2 = 0$, caso che è, come si vide già, da trascurarsi. Dunque i casi da considerare sono soltanto:

Tutte le $(X_i X_k)$ nulle, eccetto

$$(X_2 X_3) = X_1 \qquad (X_1 X_5) = X_1 \tag{1}$$

oppure tutte le $(X_i X_k)$ nulle, eccetto

$$(X_2 X_3) = X_1 \qquad (X_4 X_5) = X_1 . \tag{2}$$

B) Il G_5 abbia un G_2 come gruppo derivato.

Vediamo se è possibile che tutti quei G_4, sottogruppi di G_5, contenenti il G_2 derivato abbiano soltanto un G_1 come gruppo derivato. Dall'enumerazione di Lie dei possibili G_4 vediamo che tutti questi G_4 sarebbero di uno delle due seguenti composizioni (indicando con X_1, X_2, X_3, X_4 le trasf. infinit. generatrici di G_4):

$$(X_i X_k) = 0 \ (i, \ k = 1, \ 2, \ 3, \ 4) \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 \tag{α}$$

$$(X_i X_k) = 0 \ (i, \ k = 1, \ 2, \ 3, \ 4) \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 . \tag{β}$$

(*) Con Γ_m indicheremo, d'ora in avanti, un G_m a trasformazioni permutabili.

Trattiamo il sottocaso α). Sia X_5 una quinta trasform. infinit. di G_5. E poniamo

$$(X_i\, X_5) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_{ik}\, X_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Scriviamo le identità di Lie relative alle λ_{ik}, ricordando che il G_5 deve avere un G_2 per gruppo derivato e che questo G_2 contiene X_1.

Otterremo, sostituendo a X_5 la $X_5 - p\, X_2 - q\, X_4$ (con p, q costanti opportune) che X_5 o sarà tale che

$$(X_1\, X_5) = \lambda_{14}\, X_4 \qquad (X_i\, X_5) = 0 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4) \qquad (\lambda_{14} \neq 0),$$

oppure tale che:

$$(X_1\, X_5) = 0 \qquad (X_i\, X_5) = \lambda_{i2}\, X_2 + \lambda_{i3}\, X_3 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4).$$

Nel primo caso anche $(X_1\, X_4\, X_5\, X_2)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Nel secondo caso le $\lambda_{i2}\, X_2 + \lambda_{i3}\, X_3$ non sono tutte nulle, perchè G_5 deve avere un G_2 per gruppo derivato; quelle di esse che non sono nulle rappresentano una stessa trasformazione. Presa questa come trasformazione X_3 (e scambiando eventualmente X_2, X_3) si ottiene facilmente:

$$(X_1\, X_5) = 0 \qquad (X_i\, X_5) = \lambda_{i3}\, X_3 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4)$$

dove non tutte le λ_{i3} sono nulle. Se $\lambda_{33} \neq 0$ o $\lambda_{13} \neq 0$, allora $(X_1\, X_3\, X_4\, X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Se $\lambda_{23} \neq 0$, allora $(X_1,\ X_3,\ X_2,\ X_4 + X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Nel caso (β) otteniamo con procedimenti analoghi, che si potrà porre:

$$(X_1\, X_5) = \lambda_{11}\, X_1 + \lambda_{13}\, X_2$$
$$(X_2\, X_5) = (\lambda_{33} + \lambda_{44})\, X_2$$
$$(X_3\, X_5) = \lambda_{31}\, X_1 + \lambda_{33}\, X_3 + \lambda_{34}\, X_4$$
$$(X_4\, X_5) = \lambda_{41}\, X_1 + \lambda_{43}\, X_3 + \lambda_{44}\, X_4$$

quando alla X_5 si sostituisca $X_5 - p\, X_3 - q\, X_4$, con p, q costanti opportune.

Se $(X_1\, X_2)$ è il gruppo derivato, allora $\lambda_{33} = \lambda_{34} = \lambda_{43} = \lambda_{44} = 0$. Se $\lambda_{11} \neq 0$, il gruppo $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 + X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato. Se $\lambda_{11} = 0$, allora o $\lambda_{31} \neq 0$ o $\lambda_{41} \neq 0$. Sia p. es. $\lambda_{31} \neq 0$. Se anche $\lambda_{12} \neq 0$ il gruppo $(X_1\, X_2\, X_3\, X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato. Sia $\lambda_{12} = 0$. Sostituendo alla X_4 la $X_4 - p\, X_3$ (p conveniente costante) avremo $\lambda_{41} = 0$. Mol-

tiplicando X_5 per $\frac{1}{\lambda_{31}}$ si potrà poi fare $\lambda_{31} = 1$. E il gruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4 X_5)$ avrà la composizione:

Tutte le $(X_i X_k) = 0$ tranne

$$(X_3 X_4) = X_2 \qquad (X_3 X_5) = X_1 . \tag{3}$$

Se non è (X_1 , X_2) il gruppo derivato, è certamente $\lambda_{11} = 0$. E se non è già nulla una delle $(X_3 X_5)$, $(X_4 X_5)$ potremo sostituendo alla X_3 la $X_3 - p X_4$ (p = costante opportuna) fare $(X_3 X_5) = 0$.

Se $\lambda_{44} = 0$, è certo $\lambda_{43} \neq 0$ e il gruppo $(X_2 , \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 , X_4 , X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato. Se $\lambda_{44} \neq 0$, allora $(X_2 , \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4 , X_3 , X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

Dunque, tranne che nel caso (3) noi potremo supporre che nel G_5 esista un G_4 con un G_2 per gruppo derivato. Esaminiamo perciò se è possibile che tra i G_4 di G_5 aventi G_2 come gruppo derivato non ve ne sia alcuno con un Γ_3. Perciò ricordiamo che un G_4 con un G_2 come gruppo derivato e senza Γ_3 o ha la composizione

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_3 X_4) = (X_4 X_1) = 0 \quad (X_1 X_3) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \tag{α}$$

oppure la:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_3 X_4) = 0 \quad (X_2 X_3) = (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 . \tag{β}$$

Le formule di composizione danno nel caso (α), sostituendo alla X_5 la $X_5 - \sum_1^4 p_i X_i$ dove le p_i sono convenienti costanti che:

$$(X_i X_5) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e il G_5 contiene il gruppo $(X_1 , X_2 , X_3 + X_4 , X_5)$ che contiene il $\Gamma_3 (X_2 X_1 , X_5)$ ed ha un G_2 per gruppo derivato.

Nel caso (β) si ottiene dalle formule di composizione, sostituendo a X_5 la $X_5 - \sum_1^4 p_i X_i$ nel modo solito che si può fare:

$$(X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = - \lambda_{22} X_3 \quad (X_4 X_5) = 0.$$

Affinchè il gruppo derivato sia (X_1 , X_2) deve essere $\lambda_{22} = 0$ e allora $(X_1 X_2 X_4 X_5)$ che ha un G_2 per gruppo derivato contiene il $\Gamma_3 (X_1 X_2 X_5)$.

Potremo dunque restringerci al caso che G_5 possegga un G_4, che contiene un Γ_3 e di cui un G_2 è il gruppo derivato.

Di tali G_4 vi sono soltanto i seguenti tipi che esamineremo successivamente:

I. Sia $G_4 = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. E siano tutte le $(X_i X_k) = 0$ tranne

$$(X_1 X_4) = X_2, \qquad (X_3 X_4) = X_2.$$

I soliti metodi danno che allora la X_5 si potrà scegliere in modo che

$$(X_i X_5) = 0 \ (i = 1, 2, 4) \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2.$$

Se $\lambda_{32} = 0$, allora (X_1, X_2, X_3, X_5) è un Γ_4; se $\lambda_{32} \neq 0$, si può, mutando X_5 fare $\lambda_{32} = 1$ e otteniamo così per G_5 la composizione:

Tutte le $(X_i X_k) = 0$ tranne

$$(X_1 X_4) = X_2; \qquad (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = X_2. \tag{4}$$

II. G_4 può essere del tipo:

$$(X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots 4) \quad \text{tranne} \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_1.$$

E si trova con le solite considerazioni

$$(X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 + \lambda_{42} X_2; \quad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1,$$
$$(X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2; \quad (X_1 X_5) = 0.$$

Togliendo da X_5 multipli convenienti di X_2, X_3, X_4 si può fare

$$\lambda_{41} = \lambda_{42} = \lambda_{31} = 0.$$

Se (X_1, X_2, X_3, X_5) non è un Γ_4 è certo $\lambda_{22} \neq 0$. Si può dunque fare $\lambda_{22} = 1$.

E si trova per G_5 la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_2 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1, \quad (X_2 X_5) = X_2. \tag{5}$$

III. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = -X_1, \quad (X_3 X_4) = X_1 - X_3.$$

Togliendo da X_5 multipli di X_1, X_3, X_4 convenienti si ha che si può porre:

$$(X_1 X_5) = 0 \qquad (X_2 X_5) = 0 \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 \qquad (X_4 X_5) = 0.$$

Se $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ non è un Γ_4, sarà $\lambda_{31} \neq 0$. Si può perciò porre $\lambda_{31} = 1$ e si ha per la composizione di G_5

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = -X_1; \quad (X_3 X_4) = X_1 - X_3, \\ (X_3 X_5) = X_1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

IV. Il G_4 può essere infine della composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 \qquad (X_2 X_4) = c X_2 \qquad (c \neq 0).$$

E troviamo coi soliti procedimenti per il nostro gruppo G_5 nel caso di $c = 1$,

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1, \qquad (X_3 X_4) = X_3, \\ (X_1 X_5) = \lambda_{13} X_3, \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nel caso di $c \neq 1$

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_4) = c X_3, \quad (X_3 X_5) = X_3. \tag{8}$$

C) Il gruppo G_5 abbia un G_3 per gruppo derivato.

Nessuno dei G_4 di G_5 contenenti G_3 abbia, se è possibile, questo G_3 per gruppo derivato. E ve ne sia anzi uno il cui gruppo derivato sia un G_2, senza che esso contenga un Γ_3.

Questo G_4 perciò, o avrà la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_3 X_4) = 0 \qquad (X_2 X_3) = (X_1 X_4) = X_1$$
$$(X_2 X_4) = X_2$$

nel qual caso si può scegliere X_5 in modo che sia:

$$(X_1 X_5) = (X_4 X_5) = 0 \qquad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \qquad (X_3 X_5) = -\lambda_{22} X_3$$

(dove è certo $\lambda_{22} \neq 0$) cosicchè G_5 contiene il sottogruppo $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ con un G_3 per gruppo derivato, oppure detto G_4 ha la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_3 X_4) = (X_4 X_1) = 0$$
$$(X_1 X_3) = X_1 \qquad (X_2 X_4) = X_2$$

che, come si verifica con le sole relazioni tra le costanti di composizione non può essere contenuto in un G_5 il cui gruppo derivato sia un G_3. Esaminiamo dunque il caso in cui questo G_4 contenga un Γ_3. Esso potrà essere di varii tipi, che studieremo successivamente:

I. Sia la composizione di un tale G_4 data da:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 \qquad (X_2 X_4) = c X_2 \qquad (c \neq 0).$$

Se $c \neq 1$, si vede tosto che si può scegliere X_5 in modo che:

$$(X_1 X_5) = 0, \qquad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2, \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3,$$
$$(X_4 X_5) = \lambda_{42} X_2.$$

Ma se $\lambda_{22} \neq 0$, il nostro G_5 contiene il gruppo $(X_1, X_2, X_3, X_5 + h X_4)$ il quale, se h è opportunamente scelta, ha un G_3 per gruppo derivato.
Se invece $\lambda_{22} = 0$, è certo $\lambda_{42} \neq 0$ e si può anzi supporre $\lambda_{42} = 1$. Otteniamo così un G_5 con la composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_1 X_5) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3 \quad (X_4 X_5) = X_2 \\ (X_1 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_4) = c X_3, \\ \qquad (X_2 X_4) = (X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_3 X_1) = 0.\end{array}\right\} \quad (9)$$

Sia invece $c = 1$ Si potrà scegliere X_5 in modo che sia

$$(X_4 X_5) = \lambda_{42} X_2 \quad (X_1 X_5) = \lambda_{13} X_3 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2$$
$$(X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 .$$

Se $\lambda_{22} \neq 0$, il sottogruppo $(X_1, X_2, X_3, k X_4 + h X_5)$ dove k, h sono costanti opportune ha un G_3 per gruppo derivato. Se $\lambda_{22} = 0$, è certo $\lambda_{42} \neq 0$, e si può supporre $\lambda_{42} = 1$ e si ha un G_5 di composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_4) = X_3, \quad (X_1 X_5) = \lambda_{13} X_3, \\ \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3, \quad (X_4 X_5) = X_2 .\end{array}\right\} (10)$$

II. Il G_4 può avere la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_2 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1 .$$

Le formole di composizione danno subito che si può scegliere X_5 in modo che:

$$(X_1 X_5) = \lambda_{33} X_1 \quad (X_2 X_5) = 0 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3 \quad (X_4 X_5) = \lambda_{43} X_3$$

dove una almeno delle λ_{33}, λ_{43} non è nulla. Se $\lambda_{33} \neq 0$, il sottogruppo $(X_1, X_2, X_3, k X_5 + h X_4)$ dove k, h sono costanti opportune ha un G_3 per gruppo derivato. Si può dunque porre $\lambda_{33} = 0$, col che $\lambda_{43} \neq 0$ ossia, come si può supporre senz'altro, $\lambda_{43} = 1$. Il G_5 avrà la composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_2 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1, \\ \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1, \quad (X_4 X_5) = X_3 .\end{array}\right\} \quad (11)$$

III. Il G_4 può avere la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = - X_1 \quad (X_3 X_4) = X_1 - X_3 .$$

E si ottiene col solito metodo che X_5 si può scegliere in guisa che

$$(X_1 X_5) = 0, \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2, \quad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1, \quad (X_4 X_5) = \lambda_{42} X_2 .$$

Come precedentemente, si vede che si può supporre $\lambda_{22} = 0$, e quindi $\lambda_{42} \neq 0$, o, come si può senz'altro, $\lambda_{42} = 1$.

Otteniamo così un X_5 di composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = -X_1, \quad (X_3 X_4) = X_1 - X_3, \\ \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1, \quad (X_4 X_5) = X_2 .\end{array}\right\} \quad (12)$$

IV. Infine il G_4 può avere la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1 .$$

Si vede al solito che X_5 si può scegliere in guisa che sia:

$$(X_1 X_5) = (\lambda_{44} + \lambda_{33}) X_1 \qquad (X_2 X_5) = (\lambda_{33} + 2 \lambda_{44}) X_2$$
$$(X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 \qquad (X_4 X_5) = \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4 .$$

Affinchè il gruppo derivato sia un G_3 o è $\lambda_{33} = \lambda_{43} = 0$, $\lambda_{44} \neq 0$ oppure $\lambda_{44} = 0$. Nel primo caso (X_1, X_2, X_4, X_5) ha un gruppo G_2 come gruppo derivato.

Nel secondo si può supporre $\lambda_{33} = 0$, perchè altrimenti (X_1, X_2, X_3, X_5) avrebbe un G_3 per gruppo derivato, e quindi $\lambda_{43} = 1$. E si ha per G_5 la composizione:

$$\left.\begin{array}{l}(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2, \quad (X_4 X_5) = X_3, \\ \qquad (X_1 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1 .\end{array}\right\} \quad (12)^{\text{bis}}$$

Esaminiamo ora se è possibile che tutti i G_4 di G_5 contenenti il G_3 derivato ammettano un G_1 per gruppo derivato. Prendiamo uno di questi G_4. Esamineremo uno dopo l'altro i varii tipi di composizione, che esso può avere:

I. Il G_4 (X_1, X_2, X_3, X_4) abbia la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_1 X_4) = X_1 .$$

Scelto opportunamente X_5 si avrà che:

$$(X_1 X_5) = 0 \quad (X_i X_5) = \lambda_{i2} X_2 + \lambda_{i3} X_3 \quad (i = 2, 3, 4).$$

Dello $(X_i X_5)$ $(i = 2, 3, 4)$ almeno due non sono nulle, e sono distinte perchè G_5 ha un G_3 per gruppo derivato; se tali sono le $(X_2 X_5)$, $(X_3 X_5)$ allora il G_4 $(X_1, X_2, X_3, X_4 + X_5)$ ha proprio un G_3 per gruppo derivato. Se $(X_2 X_5)$ e $(X_3 X_5)$ non sono distinte, allora una di esse non è certo nulla, e $(X_1, X_2, X_3, X_4 + X_5)$ ha un G_2 per gruppo derivato.

II. Il gruppo G_4 può avere anche l'altra composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 .$$

Allora si trova senz'altro che scelto opportunamente X_5, avremo:

$$(X_1 X_5) = \lambda_{11} X_1 + \lambda_{12} X_2$$
$$(X_2 X_5) = (\lambda_{33} + \lambda_{44}) X_2$$
$$(X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4$$
$$(X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4 .$$

Se $\lambda_{11} \neq 0$, allora il G_3 derivato di X_5 conterrà X_1, X_2 e

$$\lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4 , \quad \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4$$

non possono rappresentare trasformazioni distinte. Sostituendo dunque alla X_3, o alla X_4 una loro opportuna combinazione lineare, potremo supporre che una di esse sia nulla; sia p. es. $\lambda_{33} = \lambda_{34} = 0$. Ma allora il gruppo

$$(X_1 , \ X_2 , \ \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4 , \ X_5)$$

ha un G_3 per gruppo derivato, a meno che $\lambda_{41} = 0$. Se $\lambda_{44} = 0$ il gruppo $(X_1 , X_2 , X_3 , X_4 + X_5)$ contiene il G_3 derivato di G_5 ed ha per gruppo derivato un gruppo G_2.

Sia invece $\lambda_{11} = 0$. Il G_3 derivato di G_5 sarà il gruppo

$$(X_2 , \ \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4 , \ \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4).$$

Mutando la X_3 o la X_4 in modo analogo al precedente, si vede poter supporre che una delle λ_{31}, λ_{41} sia nulla, p. es. che sia $\lambda_{31} = 0$.

Consideriamo il gruppo

$$(X_2 , \ \lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4 , \quad \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4 , \quad h_3 X_3 + h_4 X_4 + h_5 X_5)$$

dove h_2, h_4, h_5 sono costanti *generiche*. Il suo gruppo derivato è:

$$(\alpha) \ldots h_5 (\lambda_{33} + \lambda_{44}) X_2 \qquad (\alpha)' = (\lambda_{33} \lambda_{44} - \lambda_{34} \lambda_{43}) X_2$$

$$(\beta) \ldots (\lambda_{33} h_4 - h_3 \lambda_{34}) X_2 + h_5 \lambda_{33} (\lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4) + \\ + h_5 \lambda_{34} (\lambda_{41} X_1 + \lambda_{44} X_4 + \lambda_{43} X_3)$$

$$(\gamma) \ldots h_5 \lambda_{41} \lambda_{12} X_2 + (h_4 \lambda_{43} - h_3 \lambda_{44}) X_2 + h_5 \lambda_{43} (\lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4) + \\ + h_5 \lambda_{44} (\lambda_{41} X_1 + \lambda_{44} X_4 + \lambda_{43} X_3).$$

Se $\lambda_{33} + \lambda_{44} \neq 0$, questo gruppo per $h_5 \neq 0$ non ha per gruppo derivato un G_1 perchè infatti in tal caso i coefficienti di X_3 e di X_4 in (β) e in (γ)

$h_5(\lambda_{33}^2 + \lambda_{34}\lambda_{43})$,

$$h_5(\lambda_{33}\lambda_{34} + \lambda_{34}\lambda_{44}), \quad h_5(\lambda_{43}\lambda_{33} + \lambda_{44}\lambda_{43}), \quad h_5(\lambda_{43}\lambda_{34} + \lambda_{44}^2)$$

non possono essere contemporaneamente nulli senza che sia $\lambda_{34} = \lambda_{43} = 0$ e quindi $\lambda_{33} = \lambda_{44} = 0$, ciò che è impossibile.

Sia invece $\lambda_{33} + \lambda_{44} = 0$. Il gruppo derivato resta allora generato da due trasformazioni infinitesime, che non possono essere identiche per valori generici delle h_i (come subito si verifica) se non nei due casi seguenti:

$$\text{I.} \qquad \lambda_{33} + \lambda_{44} = 0 \quad \lambda_{41} = 0 \quad \lambda_{33}^2 + \lambda_{43}\lambda_{34} = 0.$$

Nel qual caso $(X_3 X_5)$ e $(X_4 X_5)$ sono identiche, oppure una di esse è nulla; cosicchè il gruppo G_5 non ha un G_3 per gruppo derivato.

$$\text{II.} \qquad \lambda_{33} + \lambda_{44} = 0, \quad \lambda_{41} \neq 0, \quad \lambda_{33}^2 + \lambda_{34}\lambda_{43} = 0, \quad \lambda_{12} = 0.$$

In questo caso $(X_2 X_5)$ non può essere nullo perchè altrimenti $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ sarebbe un Γ_4; e togliendo da X_4 un multiplo conveniente di X_3 si può fare $\lambda_{43} = \lambda_{44} = 0$. Si ha allora che $\lambda_{34} \neq 0$, perchè altrimenti G_5 non avrebbe un G_3 per gruppo derivato; e si può senz'altro porre $\lambda_{34} = 1$. Si ottiene così per G_5 la composizione:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_5) = X_4 \quad (X_4 X_5) = X_1. \tag{13}$$

Per studiare dunque quale dei nostri G_5 ammette un G_3 per gruppo derivato, basterà dunque ricercare ancora soltanto quelli, che contengono un G_4, di cui G_3 è il gruppo derivato. Studieremo successivamente i varii tipi di tali G_4; e ne indicheremo al solito con X_1, X_2, X_3, X_4 le trasformaz. infinit., mentre con X_5 indicheremo una quinta opportuna trasform. di G_5 non appartenente a G_4.

I. Sia il G_4 della composizione:

$$\left.\begin{array}{c}(X_2 X_3) = X_1 \quad (X_1 X_4) = 2X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3 \\ (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0.\end{array}\right\} \tag{14}$$

Si riconosce tosto che si può scegliere X_5 in modo che:

$$(X_1 X_5) = (X_2 X_5) = (X_4 X_5) = 0 \qquad (X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2. \tag{14'}$$

II. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c}(X_2 X_3) = X_1 \quad (X_1 X_4) = c X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = (c-1) X_3 \\ (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0 \quad (c \neq 1).\end{array}\right\} \tag{15}$$

Se $c \neq 0$, $c \neq 2$ si ha che X_5 si può scegliere in guisa che:

$$(X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = -\lambda_{22} X_3 \quad (X_4 X_5) = 0. \qquad (15)'$$

Se $c = 2$ si può scegliere X_5 in guisa che:

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{32} X_2 - \lambda_{22} X_3 \\ (X_4 X_5) = 0. \end{array}\right\} \qquad (15)''$$

Se $c = 0$ si può scegliere X_5 in guisa che:

$$(X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 \quad (X_1 X_5) = \lambda_{11} X_1 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{11} X_2 \quad (X_3 X_5) = 0. \qquad (15)'''$$

III. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = a X_2 \quad (X_3 X_4) = c X_3 \\ (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (a \neq 0, c \neq 0). \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Se $a \neq c \neq 1$ si vede tosto che si può scegliere X_5 in guisa che:

$$(X_1 X_5) = 0 = (X_4 X_5); \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3. \qquad (16)'$$

Se $a = 1$, $c \neq 1$, X_5 si può scegliere in modo che:

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_5) = \lambda_{12} X_2 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3 \\ (X_4 X_5) = 0. \end{array}\right\} \qquad (16)''$$

Se $a = c = 1$, X_5 si può scegliere in guisa che:

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_5) = \lambda_{12} X_2 + \lambda_{13} X_3 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 \\ (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 \quad (X_4 X_5) = 0. \end{array}\right\} \qquad (16)'''$$

Il caso di $a = c \neq 1$ si riduce facilmente al caso di $a = 1$, $c \neq 1$, ecc.

IV. Il gruppo G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c} (X_i X_k) = 0 \, (i, k = 1, 2, 3); \quad (X_1 X_4) = c X_1; \quad (X_2 X_4) = (1 + c) X_2 \\ X_3 = X_1 + c X_2 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

dove $c \neq 0$, $c \neq -1$. Si può scegliere X_5 in guisa che:

$$(X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1; \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2; \quad (X_4 X_5) = (X_1 X_5) = 0. \qquad (17)'$$

V. Infine il G_4 può essere del tipo:

$$\left.\begin{array}{c} (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2 \quad (X_3 X_4) = X_2 + X_3 \\ (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{array}\right\} \qquad (18)$$

E si vede coi soliti metodi che X_5 si può scegliere in guisa che

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = \lambda_{12} X_2 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 + \lambda_{22} X_3 \\ (X_4 X_5) = 0.\end{array}\right\} \qquad (18)'$$

Studiamo ora quei G_5 integrabili che hanno un $G_4 (X_1, X_2, X_3, X_4)$ come gruppo derivato. Se noi passiamo in rassegna tutti i varii tipi di G_4 e cerchiamo quando essi possono essere sottogruppi di un G_5, che li ammetta come gruppo derivato, vediamo ben tosto, usando delle relazioni che legano le costanti di composizione, che il G_4 deve essere del tipo

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 \qquad (19)$$

e che X_5 si può in tal caso scegliere in guisa che:

$$\left.\begin{array}{l}(X_1 X_5) = X_1 + \lambda_{12} X_2 \quad (X_2 X_5) = (\lambda_{33} + \lambda_{44}) X_2 \\ (X_3 X_5) = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{33} X_3 + \lambda_{34} X_4 \quad (X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1 + \lambda_{43} X_3 + \lambda_{44} X_4\end{array}\right\} \qquad (19)'$$

dove (poichè il gruppo derivato di G_5 è proprio un G_4)

$$\begin{vmatrix} \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Così abbiamo compiuto la ricerca delle possibili composizioni dei nostri G_5 del primo tipo; e osserviamo che con gli stessi metodi si possono ottenere tutte le possibili composizioni dei gruppi a cinque o a più parametri. Passeremo ora ai gruppi G_5 non integrabili. Essi, come sappiamo dell'opera di Lie, non possono presentare che i seguenti tre tipi possibili di composizione:

$$\text{I.} \qquad \left.\begin{array}{c}(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_1 X_5) = 0 \quad (X_1 X_3) = (X_4 X_2) = X_2 \\ (X_1 X_4) = (X_2 X_5) = X_1 \quad (X_3 X_4) = -2 X_3 \quad (X_3 X_5) = X_4 \\ (X_4 X_5) = -2 X_5.\end{array}\right\} \qquad (20)$$

$$\text{II.} \quad \left.\begin{array}{c}(X_1 X_4) = (X_1 X_5) = (X_2 X_4) = (X_2 X_5) = (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = 0 \\ (X_1 X_2) = X_1; \quad (X_1 X_3) = 2 X_2; \quad (X_2 X_3) = X_3; \quad (X_4 X_5) = X_4.\end{array}\right\} \qquad (21)$$

$$\text{III.} \qquad \left.\begin{array}{r}(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = (X_4 X_5) = (X_1 X_5) = \\ = (X_2 X_5) = (X_3 X_5) = 0 \\ (X_1 X_2) = X_1; \quad (X_1 X_3) = 2 X_2; \quad (X_2 X_3) = X_3.\end{array}\right\} \qquad (22)$$

Prima di procedere oltre, daremo effettivamente le trasformazioni infinitesime dei gruppi (1), (2),..., (22) trascurando quelli di questi gruppi che o contengono un G_4 intransitivo, o due trasformazioni infinitesime con le stesse traiettorie, e quelli che non possono essere ottenuti con gruppi su quattro variabili. A tal fine prenderemo un G_4 del G_5 da determinare: esso, per ipotesi dovrà essere transitivo. Conoscendone già la composizione, dal § 11 della mia Mem. cit., ne trarremo senz'altro le trasformazioni infinitesime X_1, X_2, X_3, X_4; per determinare poi la quinta trasformazione X_5 di G_5 ci serviremo delle relazioni che per i suoi coefficienti si ottengono esprimendo che le $(X_i X_5)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ hanno i valori trovati. Di più osserveremo che se le X_1, X_2, X_3 generano un G_3 su tre variabili x_1, x_2, x_3 e se si suppone l'elemento lineare di S_4 già ridotto alla forma

$$d s^2 = d x_4^2 + \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik} \, d x_i \, d x_k ,$$

si avrà, ponendo

$$X_5 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i (x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$. Se di più $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ dovrà essere anche

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} = 0 \, (i = 1, 2, 3)$$

per le formule di Killing.

Faremo il calcolo per il gruppo (1) come esempio, accontentandoci poi di dare il solo risultato per gli altri gruppi.

Scrivendo in esso X_2, X_3, X_4, X_1, X_5 invece di X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 la sua composizione diventa:

$$(X_i X_k) = 0 \quad \text{tranne} \quad (X_3 X_4) = X_2 \quad (X_2 X_5) = X_2 .$$

Il gruppo X_1, X_2, X_3, X_4 è perciò del tipo V al § 11 e si potrà scrivere (§ 11)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4} \quad (l_4 = \text{cost.}).$$

Le $(X_1 X_5) = (X_3 X_5) = 0$, $(X_2 X_5) = X_2$ danno

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} = 0 \, (\eta_i = 1, 2, 3, 4) \quad \frac{\partial \eta_k}{\partial x_2} = 0 \, (k = 1, 3, 4) \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = 1$$

cosicchè sarà:

$$X_5 = m_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 + m_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + m_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + m_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove m_4 è una costante, ed m_1, m_2, m_3 sono indipendenti da x_1, x_2, x_3. Per l'osservazione precedente anche m_1, m_2, m_3 saranno costanti e si potrà porre:

$$X_5 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + m_4 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Si verifica senz'altro che $(X_4 X_5) \neq 0$ non è della forma $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i X_i$, dove le λ_i sieno costanti e quindi è inutile occuparci di questo primo caso.

Passando ai G_5 di composizione (2) e scrivendo X_2, X_3, X_4, X_1, X_5 rispettivamente al posto di X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 otterremo che si potrà porre:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4};$$

$$X_5 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

con l_4, m_4 costanti. Anche di questo caso è inutile tener conto perchè la trasformazione $\frac{1}{m_4} X_4 - \frac{1}{l_4} X_5$ insieme a X_1, X_2, X_3 genera un G_4 intransitivo.

Nel caso (3) otteniamo analogamente:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1, 2, 3) \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$X_5 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

con l_4, m_4 costanti. Anche questo caso è da trascurare perchè

$$\frac{1}{m_4} X_4 - \frac{1}{l_4} X_5$$

con X_1, X_2, X_3 genera un G_4 intransitivo.

Per la stessa ragione è inutile tener conto del tipo (4) in cui si avrebbe

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \, (i = 1, 2, 3); \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4};$$

$$X_5 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

E analogamente si trova che è inutile tener conto dei tipi (5), (6), (7), (8).

Per il tipo (9) le trasform. infinit. X_1, X_2, X_3, X_4 si possono scrivere, come sappiamo dalla nostra Mem. più volte citata,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + c\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Tenendo conto dei valori di $(X_i X_5)$ $(i = 1, 2, 3)$ si vede che:

$$X_5 = \lambda_{33}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{m_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

con m_4 costante. Ma si vede subito che questo caso è da trascurare, perchè $(X_4 X_5)$ è identicamente nullo, cosicchè G_5 non avrebbe più un G_3 per gruppo derivato.

Con procedimento analogo si vede che è inutile tener conto dei tipi (10), (11), (12), $(12)^{\text{bis}}$.

Nel caso (13) il gruppo (X_1, X_2, X_3, X_4) si potrà scrivere:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_4 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_3 + l_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{l_4} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

con l_1, l_2, l_3, l_4 costanti. Posto $X_5 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i (x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{\partial}{\partial x_i}$ si ha per le formule di composizione:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \eta_h}{\partial x_3} = l_k \, (k = 1, 3); \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = - \frac{1}{l_4}; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = x_3 + l_2$$

$$l_3 \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{l_4} \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} \frac{\partial}{\partial x_i} - \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

donde

$$l_3 = 0, \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} = 0, \quad - \frac{1}{l_4} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} = 1, \quad \frac{1}{l_4} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_4} + \eta_3 = 0.$$

Sarà quindi

$$X_5 = (l_1 x_3 - l_4 x_4) \frac{\partial}{\partial x_1} + m_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \left(- m_3 l_4 x_4 + \frac{x_3^2}{2} + l_2 x_3 \right) \frac{\partial}{\partial x_2} +$$
$$+ \left(- \frac{x_3}{l_4} + m_4 \right) \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove m_3, m_4 sono costanti. Il sottogruppo X_1, X_2, $X_4 - l_3 X_3$, $X_5 - m_3 X_3$ è intransitivo, cosicchè è inutile occuparci di questo caso.

È pure inutile occuparci del tipo (14), (14)'. Basta infatti determinare $X_5 = \Sigma\, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ tenendo conto dei valori di $(X_1 X_5)$, $(X_2 X_5)$, $(X_3 X_5)$ ricordando che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$ e che se $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ anche $\frac{\partial \eta_k}{\partial x_4} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Si trova tosto che la $k X_4 + h X_5$ (dove k, h sono opportune costanti) genera con X_1, X_2, X_3 un gruppo intransitivo.

Identico risultato si troverebbe analogamente per i tipi (15) (15'), (15) (15)'', (15) (15)''', (16) (16)', (16) (16)'', (16) (16)''', (17) (17)', (18) (18)'.

Considereremo ora il tipo (19) (19)'. Avremo, indicando (§ 11 della Mem. cit.) al solito con

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \; X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \; X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \; X_4 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \\ + (x_3 + l_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1}$$

il sottogruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ (*) e con $X_5 = \sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ la quinta trasformazione di G_5, che si potrà porre, indicando con n_i, ν_i delle costanti:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 + (\lambda_{31} + l_1 \lambda_{34}) x_3 + n_1 x_4 + \nu_1 \\ \eta_2 &= \lambda_{12} x_1 + (\lambda_{33} + \lambda_{44}) x_2 + \lambda_{34} \left(\frac{1}{2} x_3^2 + l_2 x_3 \right) + \\ &\quad + (l_1 \lambda_{12} + l_2 \lambda_{33} + l_2 \lambda_{44} + l_3 l_2 \lambda_{34} - l_3 l_2 - \nu_3) x_4 + \nu_2 - n_3 \frac{x_4^2}{2} \\ \eta_3 &= (\lambda_{33} + l_3 \lambda_{34}) x_3 + n_3 x_4 + \nu_3 \\ \eta_4 &= - x_3 + n_4 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Basta per ottenere queste formule ricordare le relazioni che si ottengono esprimendo che $(X_i X_5)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ hanno i valori prefissi.

Passiamo ora al tipo (20); e, per uniformità di notazione, scambiamo X_1, X_2. Otterremo per il gruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4)$ la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0, \; (X_2 X_3) = X_1; \; (X_2 X_4) = X_2, \\ (X_1 X_4) = - X_1, \; (X_3 X_4) = - 2 X_3 .$$

(*) Dove le l_i sono costanti.

Il gruppo $(X_1 X_2 X_3 X_4)$, che naturalmente supponiamo transitivo, sarà dunque definito dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$X_4 = (-2x_1 + l_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1 l_3 - x_2 + l_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3 + l_3)\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove le l_i sono costanti. Avremo poi:

$$(X_1 X_5) = X_2 \quad (X_2 X_5) = 0 \quad (X_3 X_5) = X_4 \quad (X_4 X_5) = -2X_5 .$$

Posto $X_5 = \Sigma\, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ed esprimendo che queste eguaglianze sono soddisfatte, otterremo ricordando che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$ e indicando con n_1, n_2, n_3, n_4 delle costanti:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)^2 + n_1 e^{4x_4}; \quad \eta_2 = l_3 x_1^2 - l_1 l_3 x_1 - n_3 x_1 e^{x_4} + \\ &\qquad + n_2 e^{3x_4} + l_3 n_1 e^{4x_4} + \frac{l_1}{2} n_3 e^{x_4}; \\ \eta_3 &= x_2 - l_3 x_1 + n_3 e^{x_4}; \quad \eta_4 = x_1 - \frac{l_1}{2} . \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Andiamo ora al tipo (21). Scrivendo X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 rispettivamente per le $X_3, X_4, -X_2, X_5, X_1$ otterremo:

$$(X_1 X_3) = X_1 \quad (X_2 X_4) = X_2$$
$$(X_2 X_3) = (X_1 X_2) = (X_3 X_4) = (X_1 X_4) = 0.$$

Il G_4 generato da queste trasformazioni infinitesime, che naturalmente supponiamo transitivo, sarà dunque definito (§ 11) dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$X_4 = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 e^{-x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3 + l_3)\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dove l_1, l_2, l_3 sono costanti. Ricordiamo che possiamo supporre, posto al solito $X_5 = \Sigma\, \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, che $\eta_4 \neq 0$ perchè altrimenti il gruppo X_1, X_2, X_3, X_5 sarebbe un G_4 intransitivo. E avremo che (indicando con n_1, n_2, n_3, n_4 delle

costanti):

$$
\left.\begin{aligned}
& l_1 = 0 \\
& X_5 = [-2x_2 + e^{-x_1}(n_1 - 2l_2x_4)]\frac{\partial}{\partial x_1} + \\
& + [x_2^2 + e^{-2x_1}(-l_2^2 x_4^2 + n_1 l_2 x_4 + n_2)]\frac{\partial}{\partial x_2} + \\
& + n_3 e^{(x_1+x_4)}\frac{\partial}{\partial x_3} + n_4 e^{-x_1}\frac{\partial}{\partial x_4}\cdot
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}
$$

Per ottenere queste formule basta ricordare che

$$(X_1 X_5) = 2X_3 \quad (X_2 X_5) = 0 \quad (X_3 X_5) = X_5 \quad (X_4 X_5) = 0.$$

Occupiamoci ora del tipo (22). Scrivendo X_1, X_4, X_3, X_2, X_5 al posto delle $(X_1 X_2 X_4 X_5 X_3)$ otteniamo intanto:

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0 \quad (X_1 X_4) = X_1 \quad (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0$$

cosicchè si potrà scrivere (§ 11 della mia Mem. cit.)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_4 = (x_1 + l_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + l_2\frac{\partial}{\partial x_2} + l_3\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\cdot$$

Poniamo al solito $X_5 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot$ Esprimendo che

$$(X_2 X_5) = (X_3 X_5) = 0, \quad (X_1 X_5) = 2X_4, \quad (X_4 X_5) = X_5$$

troveremo che si potrà porre, indicando con n_i delle costanti

$$
\left.\begin{aligned}
& X_5 = (x_1^2 + 2x_1 l_1 + n_1 e^{-2x_4})\frac{\partial}{\partial x_1} + (2l_2 x_1 + n_2 e^{-x_4})\frac{\partial}{\partial x_2} + \\
& + (2l_3 x_1 + n_3 e^{-x_4})\frac{\partial}{\partial x_3} - 2(l_1 + x_1)\frac{\partial}{\partial x_4}\cdot
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}
$$

Per le prime due classi da esaminare ci siamo ricondotti ai soli tipi (I), (II), (III), (IV).

Studiamo ora quei G_5 che contengono per sottogruppo uno di quei G_4 intransitivi che si possono considerare come gruppi di movimenti. E studieremo anzitutto le loro possibili composizioni. E perciò osserviamo che un G_4 intransitivo, che si possa considerare come gruppo di movimenti ha una delle

composizioni seguenti: (Per il valore effettivo v. § 11 A.)

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1$$
$$(X_2 X_4) = - X_3 \quad (X_3 X_4) = X_2$$

oppure:

$$(X_2 X_1) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = 0 \quad (X_1 X_3) = - X_1$$
$$(X_1 X_4) = X_3 \quad (X_3 X_4) = - X_4$$

oppure:

$$(X_1 X_2) = X_3 \quad (X_2 X_3) = X_1 \quad (X_3 X_1) = X_2$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0.$$

Cerchiamo di trovare le possibili composizioni di un G_5 che possegga per sottogruppo uno di questi G_4. Porremo

$$(X_i X_5) = \sum_{k=1}^{5} \lambda_{ik} X_k \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

e scriveremo le relazioni tra le costanti di composizione, cercando poi di semplificare i risultati, sostituendo alla X_5 una trasformazione $X_5 - \sum_{i=1}^{4} p_i X_i$ dove le p_i sono opportune costanti. Troveremo così nel primo caso:

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = 2\lambda_{22} X_1 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{22} X_3 \\ (X_4 X_5) = \lambda_{41} X_1\end{array}\right\} \qquad \text{(V)}$$

oppure

$$\left.\begin{array}{c}(X_1 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = - \lambda_{33} X_2 + \lambda_{45} \lambda_{33} X_2 \quad (X_3 X_5) = \lambda_{33} X_3 \\ (X_4 X_5) = - 2\lambda_{33} X_4 + \lambda_{45} X_5 + \lambda_{41} X_1; \quad (4\lambda_{33} + \lambda_{45}^2 \lambda_{33} = 0).\end{array}\right\} \quad \text{(VI)}$$

Nel secondo caso troveremo:

$$(X_1 X_5) = (X_3 X_5) = (X_4 X_5) = 0 \quad (X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 + \lambda_{25} X_5. \qquad \text{(VII)}$$

Nel terzo caso infine avremo:

$$(X_1 X_5) = (X_2 X_5) = (X_3 X_5) = 0; \quad (X_4 X_5) = \lambda_{44} X_4 + \lambda_{55} X_5. \qquad \text{(VIII)}$$

Troviamo ora effettivamente la X_5 in questi casi, servendoci dei valori delle $(X_i X_5)$ testè dati. Porremo $X_5 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; supponendo $\eta_4 \neq 0$, perchè altrimenti lo spazio ammetterebbe un G_5 intransitivo e quindi anche un G_6 intransitivo, caso che esamineremo a parte.

Le (V), (VI)... daranno successivamente delle equazioni per le η_i, che integreremo.

Otterremo così nel caso V, ricordando che $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$ e che se

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

anche $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ che:

$$X_5 = \lambda_{22} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 \lambda_{22} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_{22} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}. \qquad \text{(V)}'$$

Nel caso VI si trova tosto che deve essere $\lambda_{45} = 0$ e quindi anche $\lambda_{33} = 0$; cosicchè questo caso rientra nel precedente, dove si faccia $\lambda_{22} = 0$.

Nel caso VII si trova:

per $n = 0$, $\lambda_{25} \neq 0$

$$X_5 = e^{\lambda_{22} x_3} \left[\nu_3(x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right] \qquad \text{(VII)}'$$

dove ν_3 è funzione di x_4,

per $n = 0 = \lambda_{25}$

$$X_5 = \lambda_{22} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \qquad \text{(VII)}''$$

per $n \neq 0$,

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad \lambda_{25} = \lambda_{22} = 0. \qquad \text{(VII)}'''$$

Nel caso VIII si trova:

per $n \neq 0$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad \lambda_{45} = \lambda_{44} = 0 \qquad \text{(VIII)}'$$

per $n = 0$, $\lambda_{45} = 0$

$$X_5 = \lambda_{44} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \qquad \text{(VIII)}''$$

per $n = 0$, $\lambda_{45} \neq 0$

$$X_5 = e^{\lambda_{44} x_3} \left[\nu_3(x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right]$$

dove ν_3 è funzione di x_4.

La ricerca perciò degli spazii G_4 che ammettono un G_5 è ridotta perciò a quella degli spazii che ammettono uno dei G_5 trovati (I), (II), (III), (IV), (V)', (VII)', (VII)'', (VII)''', (VIII)', (VIII)'', (VIII)'''.

Nel caso (I) abbiamo trovato, posto

$$X_5 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e indicando con $n_1, \nu_1, n_2, \nu_2, n_3, \nu_3, n_4$ delle costanti dipendenti dalle λ_{41}, λ_{43}, λ_{44}

$$\eta_1 = x_1 + (\lambda_{31} + l_1 \lambda_{34}) x_3 + n_1 x_4 + \nu_1$$

$$\eta_2 = \lambda_{12} x_1 + (\lambda_{33} + \lambda_{44}) x_2 + \lambda_{34}\left(\frac{x_3^2}{2} + l_2 x_3\right) +$$
$$+ (l_1 \lambda_{12} + l_3 \lambda_{33} + l_2 \lambda_{44} + l_3 l_2 \lambda_{34} - l_3 l_2 - \nu_3) x_4 + \nu_2 - n_3 \frac{x_4^2}{2}$$

$$\eta_3 = (\lambda_{33} + l_3 \lambda_{34}) x_3 + n_3 x_4 + \nu_3$$

$$\eta_4 = -x_3 + n_4 .$$

Mutando le notazioni e trascurando in η_1, η_2, η_3 le costanti additive otteniamo:

$$\eta_1 = x_1 + (\lambda_{31} + l_1 \lambda_{34}) x_3 + n_1 x_4 ;$$

$$\eta_2 = \lambda_{12} x_1 + (\lambda_{33} + \lambda_{44}) x_2 + \lambda_{34}\left(\frac{x_3^2}{2} + l_2 x_3\right) - n_3 \frac{x_4^2}{2} + \nu_3 x_4 ;$$

$$\eta_3 = (\lambda_{33} + l_3 \lambda_{34}) x_3 + n_3 x_4 ;$$

$$\eta_4 = n_4 - x_3 .$$

Il gruppo (X_1, X_2, X_3, X_4) è del tipo citato nella prima pagina del presente lavoro; ma, come abbiamo ivi detto, ogni spazio che ammette un G_4 di questo tipo ammette un G_5, contenente G_4, e la cui quinta trasformazione infinitesima non è del tipo precedente; cosicchè questi spazii sono inclusi senz'altro tra gli spazii dei tipi seguenti; ed è di essi inutile occuparci.

Passiamo al tipo II. Posto $X_5 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, abbiamo trovato, indicando con n_i delle costanti e trascurando nelle η_2, η_3 le costanti additive even-

tuali che

$$\eta_1 = \left(x_1^2 - l_1 x_1 + n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1^2}{2}\right);$$

$$\eta_2 = l_3 x_1^2 - x_1 l_1 l_3 - n_3 x_1 e^{x_1} + n_2 e^{3x_1} + l_3 n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1}{2} n_3 e^{x_1};$$

$$\eta_3 = x_2 - l_3 x_1 + n_3 e^{x_1};$$

$$\eta_4 = x_1 - \frac{l_1}{2}.$$

Il gruppo (X_1, X_2, X_3, X_4) è del tipo I (*) (perchè ammette un G_3 come gruppo derivato) dove si ponga $c = -1$; quindi l'elemento lineare è del tipo già trovato a pag. 78 della mia Mem. cit. Scriviamo le equazioni di Killing relative ad X_5 e ai varii coefficienti dell'elemento lineare. Scrivendo l'equazione per a_{22} troviamo $p_{23} = 0$. Scrivendo l'equazione relativa ad a_{31} abbiamo:

$$\left(x_1^2 - l_1 x_1 + n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1^2}{4}\right)(p_{12} e^{-3x_1} - l_3 p_{22} e^{2x_1}) +$$

$$+ \left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)(x_1 \psi' + \vartheta') + (2 x_1 - l_1)(x_1 \psi + \vartheta) + 2 l_3 x_1 (x_1 \chi + \lambda) -$$

$$- l_3 (x_1^2 \chi + 2 x_1 \lambda + \mu) = 0.$$

Annullando i coefficienti di x_1^2, x_1, x_1^0 otteniamo:

$$p_{13} e^{-x_1} + l_1 l_3 p_{22} e^{-2x_1} = 0$$

$$n_1 p_{12} e^{x_1} - (n_1 l_3 p_{22} + l_3 p_{33}) e^{2x_1} + \frac{l_1}{2} p_{13} e^{-x_1} = 0$$

ossia

$$p_{13} = l_1 l_3 p_{22} = n_1 p_{12} = n_1 l_3 p_{22} + l_3 p_{33} = 0.$$

Scrivendo l'equazione di Killing relativa ad a_{33} si ha:

$$\left(x_1^2 - l_1 x_1 + n_1 e^{4x_1} + \frac{l_1^2}{4}\right)(2 x_1 \chi + 2 \lambda) +$$

$$+ \left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)(x_1^2 \chi' + 2 x_1 \lambda' + \mu') = 0$$

donde

$$l_1 p_{22} = l_1 p_{33} = p_{33} + n_1 p_{22} = 0.$$

(*) Cfr. pag. 77 della mia Mem. cit.

E poichè è $p_{12} = p_{23} = 0$, sarà $p_{33} \neq 0$ perchè altrimenti la forma sarebbe a discriminante nullo; quindi $l_1 = 0$. Essendo $p_{33} \neq 0$ si avrà per la

$$p_{33} + n_1 p_{22} = 0$$

che

$$n_1 p_{22} \neq 0$$

e quindi

$$n_1 \neq 0 \qquad p_{22} \neq 0$$

e per la

$$n_1 p_{12} = 0$$

si otterrà

$$p_{12} = 0.$$

Scrivendo l'equazione di Killing relativa ad a_{11} otteniamo:

$$2 n_3 p_{12} e^{-2x_1} - 2 l_3 p_{13} e^{-x_1} = 0$$

che è, per le precedenti, senz'altro soddisfatta.

Scrivendo l'equazione di Killing relativa ad a_{12} troviamo

$$\left(x_1 - \frac{l_1}{2}\right)\psi' + (x_1 \psi + \xi) - l_3 (x_1 \chi + \lambda) + \psi (2 x_1 - l_1) +$$
$$+ \chi (2 l_3 x_1 - l_1 l_3 - n_3 e^{x_1}) = 0$$

ossia:

$$n_2 p_{22} = 0$$

ossia, poichè $p_{22} \neq 0$,

$$n_3 = 0.$$

L'equazione di Killing relativa ad a_{23} si trova senz'altro, per le equazioni precedenti, soddisfatta.

L'equazione di Killing per a_{41} si riduce alla $\frac{\partial \tau_4}{\partial x_4} = 0$.

L'equazione di Killing per a_{14} diventa:

$$1 = 4 p_{11} n_1 - 3 l_3 n_2 p_{22} e^{x_1}$$

ossia

$$p_{11} = \frac{1}{4 n_1}; \qquad l_3 n_2 = 0.$$

L'equazione di Killing per a_{24} diventa:

$$n_2 p_{22} e^{x_1} = 0$$

ossia, poichè $p_{22} \neq 0$, $n_2 = 0$.

L'equazione di Killing per a_{34} si trova perciò soddisfatta.
Troviamo così che

$$d s^2 = d x_4^2 + \frac{1}{4 n_1} e^{-4 x_4} d x_1^2 +$$
$$+ p_{22} e^{-2 x_4} d x_2^2 - 2 l_3 p_{22} e^{-2 x_4} d x_1 d x_2 - 2 l_3 p_{22} x_1 e^{-2 x_4} d x_1 d x_3 +$$
$$+ 2 x_1 p_{22} e^{-2 x_4} d x_2 d x_3 + (x_1^2 p_{22} e^{-2 x_4} - n_1 p_{22} e^{2 x_4}) d x_3^2$$

che ammette il gruppo generato dalle:

$$\left.\begin{aligned} & X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_3 = - \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & X_4 = - 2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (- l_3 x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \\ & X_5 = (x_1^2 + n_1 e^{4 x_4}) \frac{\partial}{\partial x_1} + (l_3 x_1^2 + l_3 n_1 e^{4 x_4}) \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ & \qquad\qquad + (x_2 - l_3 x_1) \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} . \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Studiamo ora il tipo III. Un gruppo di tal tipo contiene come sottogruppo il gruppo generato dalle X_1, X_2, X_3, X_4 cosicchè potremo porre (cfr. pag. 79 della mia Mem. cit.):

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi d x_1^2 + 2 \psi e^{x_4} d x_1 d x_2 + \vartheta e^{2 x_4} d x_2^2 +$$
$$+ \mu d x_3^2 + 2 \chi d x_1 d x_3 + 2 \lambda e^{x_4} d x_2 d x_3$$

dove

$$\lambda = p_{23} e^{x_4}, \qquad \mu = p_{33} e^{2 x_4} \qquad \vartheta = p_{22} \qquad \chi = e^{x_4} (- l_2 p_{23} x_4 + p_{13})$$
$$\psi = (- l_2 p_{22} x_4 + p_{12}) \qquad \varphi = - 2 l_2 \left(p_{12} x_4 - \frac{l_2}{2} p_{22} x_4^2 + p_{11}\right).$$

Scriviamo le equazioni di Killing relative alla X_5, ricordando che per ipotesi $n_4 \neq 0$. Scrivendo l'equazione per a_{33} troviamo

$$p_{33} = 0. \qquad (\alpha)$$

Scrivendo l'equazione per a_{23} troviamo

$$p_{13} = p_{23} \frac{n_1 + n_4}{2} \qquad (\beta)$$

e quindi $p_{23} \neq 0$, perchè altrimenti essendo $p_{13} = p_{23} = p_{33} = 0$, il nostro elemento lineare sarebbe degenere.

Scrivendo l'equazione relativa ad a_{22}, troviamo

$$p_{12} = \frac{1}{2} n_1 p_{22}. \qquad (\gamma)$$

Scrivendo l'equazione relativa ad a_{12} e annullandovi il termine indipendente da x_4 troviamo

$$4 l_2 p_{11} - n_4 l_2 p_{22} - 2 n_2 p_{22} - n_3 p_{23} = 0. \qquad (\delta)$$

Operando analogamente per a_{11} troviamo:

$$4 l_2 p_{11} n_1 - 2 l_2 p_{12} n_4 - 4 p_{12} n_2 - 2 n_3 p_{13} = 0 \qquad (\varepsilon)$$

ossia, per le (β), (γ):

$$4 l_2 p_{11} n_1 - p_{22} n_4 l_2 n_1 - 2 p_{22} n_1 n_4 - n_3 n_1 p_{23} - n_4 n_3 p_{23} = 0. \qquad (\zeta)$$

Sottraendo dalla (ζ) la (δ) moltiplicata per n_1 troviamo

$$n_4 n_3 p_{23} = 0$$

e, poichè

$$n_4 \neq 0, \quad p_{23} \neq 0 \quad \text{sarà} \quad n_3 = 0. \qquad (\zeta')$$

Scrivendo l'equazione per a_{34}, avremo:

$$- 2 e^{x_4} (- l_2 p_{23} x_4 + p_{13}) l_2 e^{-x_1} +$$

$$+ p_{23} e^{x_1 + x_4} [e^{-2x_1} (- 2 l_2^2 x_4 + n_1 l_2)] + p_{23} e^{2x_4} (- n_3 e^{-x_1 - x_4}) = 0$$

donde si ricava:

$$- 2 l_2 p_{13} + n_1 l_2 p_{23} - n_3 p_{33} = 0$$

ossia per le (β), (ζ')

$$p_{23} l_2 n_4 = 0$$

e poichè $p_{23} \neq 0$, $n_4 \neq 0$

$$l_2 = 0. \qquad (\eta)$$

Scriviamo ora l'equazione di Killing relativa ad a_{14}. Avremo:

$$- 2 l_2 \left(p_{12} x_4 - \frac{l_2}{2} p_{22} x_4^2 + p_{11}\right) (- 2 l_2 e^{-x_1}) +$$

$$+ e^{x_1} (- l_2 p_{22} x_4 + p_{12}) e^{-2x_1} (- 2 l_2^2 x_4 + n_1 l_2) +$$

$$+ e^{x_4} (- n_3 e^{-x_1 - x_4}) (- l_2 p_{23} x_4 + p_{13}) = n_4 e^{-x_1}$$

donde per le (ζ'), (η) si trae

$$n_4 = 0$$

uguaglianza contraria all'ipotesi. Del caso III è perciò inutile occuparci.

Tratteremo ora del IV caso. L'elemento lineare da cercarsi sarà del tipo (§ 13 della mia Mem. cit.).

$$d s^2 = d x_4^2 + p_{11} e^{2x_4} d x_1^2 + p_{22} d x_2^2 + p_{33} d x_3^2 + 2 p_{12} e^{x_4} d x_1 d x_2 + \\ + 2 p_{13} e^{x_4} d x_1 d x_3 + 2 p_{23} d x_2 d x_3$$

dove le p_{ik} sono costanti, il cui determinante P non è nullo.

Scrivendo le equazioni di Killing per le a_{ik} relative alla X_5 troviamo:

$$l_2 p_{i2} + l_3 p_{i3} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} 2 p_{11} n_1 + p_{12} n_2 + p_{13} n_3 &= -2 \\ 2 p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3 &= 0 \qquad (i = 2,\ 3). \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Affinchè P sia diverso da zero, sarà per le (α)

$$l_2 = l_3 = 0.$$

Dalle (β) abbiamo poi indicando con π_{ik} il complemento algebrico di p_{ik} in P diviso per P che:

$$n_1 = -\pi_{11} \qquad n_2 = -2\pi_{12} \qquad n_3 = -2\pi_{13}.$$

Otteniamo così, aggiungendo alla X_5 una conveniente combinazione lineare delle X_1, X_2, X_3, X_4:

$$\left.\begin{aligned} d s^2 &= d x_4^2 + p_{11} e^{2x_4} d x_1^2 + 2 p_{12} e^{x_4} d x_1 d x_2 + 2 p_{13} e^{x_4} d x_1 d x_3 + \\ &\qquad + p_{22} d x_2^2 + p_{33} d x_3^2 + 2 p_{23} d x_2 d x_3 \\ X_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}\ (i = 1,\ 2,\ 3); \quad X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}; \\ X_5 &= (x_1^2 - \pi_{11} e^{-2x_4}) \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\pi_{12} e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} - \\ &\qquad - 2\pi_{13} e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} - 2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Nel caso (V)' si ha (§ 13 della mia Mem. cit.) che si può scrivere:

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, d x_2^2 + 2 x_1 \psi\, d x_2 d x_3 + (x_1^2 \psi + \varphi)\, d x_3^2 \qquad (C)$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4. Scrivendo le equazioni di Killing si trova

$$-\varphi' + 2\varphi\lambda_{22} = 0$$
$$-\psi' + 4\psi\lambda_{22} = 0$$

ossia

$$\varphi = l_1 e^{2\lambda_{22}x_4}$$
$$\psi = l_2 e^{4\lambda_{22}x_4},$$

dove l_1, l_2 sono costanti.

Nel caso (VII) si ha (osservando il sottogruppo X_1, X_2, X_3, X_4 (§ 13 della Mem. cit.)) che si può porre, indicando con φ, ψ delle funzioni di x_4,

$$\left.\begin{array}{l} d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, d x_3^2 + e^{2x_1}[(1 - n^2)\varphi + n^2\psi]\, d x_2^2 + \\ \quad + 2 n \psi e^{x_1} d x_2\, d x_3 \end{array}\right\} . \qquad (D)$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4.

Nel caso (VII)''' avremo senz'altro che φ, ψ sono costanti effettive. (D''')

Nel caso (VII)'' abbiamo, usando delle equazioni di Killing,

$$n = \varphi' = -\psi' + 2\lambda_{22}\psi = 0$$

ossia

$$n = 0, \quad \varphi = l_1, \quad \psi = l_3 e^{2\lambda_{22}x_4} \qquad (D'')$$

con l_1, l_3 costanti.

Nel caso (VII)' troviamo, scrivendo le equazioni di Killing,

$$n = \varphi' = 0 \qquad \psi \nu'_3 = \lambda'_{25} \qquad -\psi' + 2\lambda_{25}\nu_3\psi = 0.$$

Portando nella terza di queste il valore di λ_{25} dato dalla seconda, abbiamo poichè $\psi \neq 0$ (altrimenti la D sarebbe una forma degenere)

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\psi}\right)}{\partial x_4} + \frac{\partial(\nu_3^2)}{\partial x_4} = 0$$

donde, integrando,

$$\frac{1}{\psi} = l_3^2 - \nu_3^2 \quad \text{e quindi} \quad \nu'_3 = \lambda_{25} l_3^2 - \lambda_{25}\nu_3^2$$

dove l_3 è una costante. Integrando di nuovo si ottiene

$$\nu_3 = l_3 \operatorname{tang} h\,(l_3\lambda_{25} x_4 + \text{cost.})$$

e quindi

$$l_3^2 - \nu_3^2 = l_3 \frac{1}{\cos h^2 (l_3 \lambda_{25} x_4 + \text{cost.})}$$

$$\varphi' = n = 0 ; \qquad \psi = \frac{\cos h^2 (l_3 \lambda_{25} x_4 + \text{cost.})}{l_3^2} . \qquad \text{(D)}'$$

Se $l_3 = 0$ si ha

$$\left(\frac{1}{\nu_3}\right)' = \lambda_{25} , \quad \nu_3 = \frac{1}{\lambda_{25} x_4 + n_3} \quad \psi = -\left(\frac{1}{\lambda_{25} x_4 + n_3}\right)^2 . \qquad \text{(D)}'^{\text{bis}}$$

Nel caso VIII avremo che si potrà porre, indicando con φ e ψ delle funzioni di x_4,

$$\left. \begin{aligned} d s^2 = d x_4^2 + \varphi \, d x_1^2 + \psi \, d x_3^2 + 2 n \psi \cos x_1 \, d x_2 \, d x_3 + \\ + (n^2 \psi \cos^2 x_1 + \varphi \operatorname{sen}^2 x_1) \, d x_2^2 . \end{aligned} \right\} \qquad \text{(E)}$$

Nel caso (VIII)′ avremo senz'altro, indicando con l_1, l_3 delle costanti,

$$\varphi = l_1 = \text{cost.} ; \qquad \psi = l_3 = \text{cost.} \qquad \text{(E}'\text{)}$$

Nel caso (VIII)″ abbiamo, usando delle formule di Killing,

$$n = \varphi' = 0 ; \qquad - \psi' + 2 \psi \lambda_{44} = 0$$

ossia

$$n = 0 ; \qquad \varphi = l_1 ; \qquad \psi = l_3 e^{2 \lambda_{44} x_4} \qquad \text{(E}''\text{)}$$

dove l_1, l_3 sono costanti.

Nel caso (VIII)‴ avremo analogamente:

$$n = \varphi' = 0 ; \qquad - \psi' + 2 \psi n_3 \lambda_{45} = 0 ; \qquad \psi \nu'_3 = \lambda_{45}$$

donde si ricava come nel caso (VII)‴

$$n = 0 ; \quad \varphi = l_1 ; \quad \psi = \frac{1}{l_3^2 - \nu_3^2} ; \quad \nu_3 = l_3 \operatorname{tangh} (l_3 \lambda_{45} x_4 + \text{cost.}) \qquad \text{(E}'''\text{)}$$

dove l_1, l_3 sono costanti.

Del resto dal nostro punto generale di vista i casi (VII) ed (VIII) sono identici: da ciò si spiega l'analogia di risultati per essi ottenuti. In fondo dunque di spazii a quattro dimensioni che ammettono un G_5 abbiamo i soli sei tipi A, B, C, (D, D′), (D, D″), (D, D‴).

Noi procederemo ora alla ricerca degli spazii S_4 che ammettono un G_6 e distingueremo i due casi che questo G_6 sia intransitivo o transitivo.

Il primo caso si suddistinge in due altri:

I. Il gruppo G_6, che per i nostri teoremi generali si può immaginare già ridotto a un gruppo su tre variabili sole X_1, X_2, X_3, è in tale forma un gruppo di movimenti di un S_3 euclideo. Se le $x_4 = \text{cost.}$ sono le V_3 invarianti, sarà

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Il gruppo G_6 si può immaginare generato dalle:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1};\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2};\quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3};\quad X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1};$$

$$X_5 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2};\quad X_6 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Scrivendo le equazioni di Killing troviamo:

$$ds^2 = dx_4^2 + \varphi\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad \text{(L)}$$

dove φ è soltanto funzione di x_4.

II. Il gruppo G_6 può essere simile a un gruppo di uno spazio a curvatura costante. E se le $x_4 = \text{cost.}$ sono le varietà minime invarianti si avrà:

$$ds^2 = dx_4^2 + \sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Il gruppo G_6 si può immaginare generato da sei trasformazioni sulle tre lettere x_1, x_2, x_3, che si possono scrivere sotto la forma seguente:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2};\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3};\quad X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_4 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_5 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{e^{-2x_1}}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_6 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{x_3^2 - x_2^2}{2} - \frac{e^{-2x_1}}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Scrivendo le formule di Killing troviamo senz'altro

$$a_{22} = a_{33} = \varphi\, e^{2x_1};\quad a_{11} = \varphi;\quad a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$$

dove φ è funzione di x_4, cosicchè si avrà:

$$ds^2 = dx_4^2 + \varphi\,(dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + e^{2x_1} dx_3^2). \qquad \text{(M)}$$

Sia invece il G_6 transitivo: esso ammetterà come sottogruppo un G_5 transitivo, cosicchè l'elemento lineare dovrà essere di uno dei tipi A, B, C, (D, D'), (D, D''), (D, D'''). Quando dunque uno spazio dotato di uno di questi elementi lineari può ammettere un G_6? Possiamo per questa ricerca procedere in due modi: o studiare, secondo il metodo del prof. Bianchi, i casi particolari di questi tipi oppure, seguendo la via da noi tracciata, cercare di prefissar prima la forma di una sesta trasformazione infinitesima, che con le precedenti formi un G_6. E si possono anche contemperare insieme i due metodi. Noi useremo l'uno e l'altro di questi procedimenti. Studiamo anzitutto il tipo (A): Sia X_6 una sesta trasformazione infinitesima generatrice di un G_6 che contenga il G_5 corrispondente come sottogruppo. Potremo scrivere:

$$(X_i X_6) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} X_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{1}$$

Scriviamo le identità di Iacobi relative alle terne X_i, X_k, X_6 $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$ annullando in ciascuna di esse il coefficiente di X_6. Otterremo:

$$\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0.$$

E se è

$$X_6 = \sum_{i=1}^{4} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

troviamo, ricordando le (1) per $i = 1, 2, 3$ che

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = -\lambda_{14} + \lambda_{15} x_1$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{24} + \lambda_{25} x_1$$

$$-\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = -\lambda_{34} + \lambda_{35} x_1$$

l'ultima delle quali si scrive:

$$-\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = -\lambda_{34} + \lambda_{35} x_1 - x_3 (-\lambda_{14} + \lambda_{15} x_1)$$

Poniamo nella (1) $i = 4$ e paragoniamo i coefficienti di $\frac{\partial}{\partial x_4}$ nei due membri. Otterremo:

$$-2 x_1 \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} + (l_3 x_1 - x_2) \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} + (x_3 + l_3) \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{44} + \lambda_{45} x_1.$$

Sostituiamo in questa equazione alle

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}$$

i loro valori già trovati. Otteniamo:

$$+ 2\, x_1 \left[- \lambda_{34} + \lambda_{35}\, x_1 + \lambda_{14}\, x_3 - \lambda_{15}\, x_1\, x_3\right]$$
$$- (l_3\, x_1 + x_2)\,(- \lambda_{14} + \lambda_{15}\, x_1)$$
$$+ (l_3 + x_3)\,(- \lambda_{24} + \lambda_{25}\, x_1) = - \lambda_{44} + \lambda_{45}\, x_1 \,.$$

Da questa equazione si deduce, tra l'altro,

$$\lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \lambda_{35} = 0.$$

Quindi sarà:

$$\eta_4 = \lambda_{34}\, x_1 + \text{cost.}$$

Sottraendo perciò dalla X_6 multipli convenienti delle X_4, X_5 si può dunque fare che $\eta_4 = 0$. Le equazioni precedenti danno allora che sarà $\lambda_{i4} = \lambda_{i5} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ e quindi (X_1, X_2, X_3, X_6) sarebbe un gruppo evidentemente intransitivo. Di questo caso è perciò inutile occuparci, perchè il suo studio rientra in uno dei casi seguenti.

Studieremo ora il caso (B). Sia X_6 una trasformazione infinitesima che col G_5 corrispondente generi un gruppo G_6.

E poniamo

$$(X_i\, X_6) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik}\, Y_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{2}$$

Togliendo da X_6 multipli convenienti di X_1, X_4, X_5 si può fare

$$\lambda_{14} = \lambda_{11} = \lambda_{41} = 0.$$

E ciò, perchè scrivendo le identità di Iacobi relative alle terne (X_1, X_4, X_6), X_1, X_5, X_6), (X_4, X_5, X_6) e annullandovi il coefficiente di X_6 si ottiene

$$\lambda_{16} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0.$$

Si ottiene dalle (2), analogamente a quanto sopra,

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = - \lambda_{14} - 2\, \lambda_{15}\, x_1$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = - \lambda_{24} - 2\, \lambda_{25}\, x_1 + \lambda_{26}\, \eta_4$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = - \lambda_{34} - 2\, \lambda_{35}\, x_1 + \lambda_{36}\, \eta_4$$

$$x_1 \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = - \lambda_{44} - 2\, \lambda_{45}\, x_1 \,.$$

Confrontando la prima e l'ultima di queste equazioni e scrivendo le condizioni di integrabilità si ottiene, poichè $\lambda_{14} = 0$,

$$\lambda_{45} = \lambda_{15} = \lambda_{44} = \lambda_{25} = \lambda_{35} = 0.$$

Scrivendo le identità di Iacobi per le varie terne (X_i, X_k, X_6) $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$ otteniamo

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{21} = \lambda_{24} = \lambda_{31} = \lambda_{34} = \lambda_{42} = \lambda_{43} = \lambda_{45} = \lambda_{51} =$$
$$= \lambda_{52} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = \lambda_{55} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{33}\lambda_{21} - \lambda_{26}\lambda_{31} &= 0 \\ \lambda_{36}\lambda_{22} - \lambda_{26}\lambda_{32} &= 0 \\ \lambda_{36}\lambda_{23} - \lambda_{26}\lambda_{33} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

cosicchè sarà

$$(X_i X_6) = 0 \qquad (i = 1, 4, 5)$$
$$(X_2 X_5) = \lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 + \lambda_{26} X_6$$
$$(X_3 X_6) = \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 + \lambda_{36} X_6 .$$

Se $\lambda_{26} = \lambda_{36} = 0$, sarà

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = 0$$

e poichè è pure

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$$

sarà

$$\eta_4 = \text{cost.}$$

Ed esisterà allora una combinazione lineare delle X_4, X_6 che con X_1, X_2, X_3 genera un G_4 intransitivo; lo studio di questo caso è inutile, perchè rientra nei casi seguenti. Sia dunque p. es.

$$\lambda_{26} \neq 0.$$

Prendendo $\lambda_{22} X_2 + \lambda_{23} X_3 + \lambda_{26} X_6$ come sesta trasformazione infinitesima del gruppo avremo per le (3) che sarà

$$(X_1 X_6) = 0 ; \qquad (X_2 X_6) = k X_6 ;$$
$$(X_3 X_6) = h X_6 ; \qquad (X_4 X_6) = (X_5 X_6) = 0$$

dove k, h sono costanti, e k è differente da zero.

Ricordando i valori delle $(X_i X_6)$ per $i = 1, 2, 3, 4$ troveremo delle equazioni differenziali per i coefficienti della X_6; e ne otterremo, integrando,

$$\eta_1 = k_1 e^{-x_1 + hx_2 + hx_3}$$
$$\eta_2 = k_2 e^{hx_2 + hx_3}$$
$$\eta_3 = k_3 e^{hx_2 + hx_3}$$
$$\eta_4 = k_4 e^{hx_2 + xh_3}$$

dove k_1, k_2, k_3, k_4 sono costanti.

Esprimiamo ora che $(X_5 X_6) = 0$.

Ne trarremo:

$$k n_2 e^{-x_4} X_6 + h n_3 e^{-x_4} X_6 +$$
$$+ 2 \eta_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + \eta_4 \left(2 n_1 e^{-2x_4} \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} + n_3 e^{-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = 0$$

donde

$$\left.\begin{array}{ll} (k n_2 + h n_3) k_1 + 2 n_1 k_4 = 0 & (k n_2 + h n_3) k_2 + n_2 k_4 = 0 \\ (k n_2 + h n_3) k_3 + n_3 k_4 = 0 & (k n_2 + h n_3) k_4 + 2 k_1 = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Affinchè X_1, X_2, X_3, X_6 sia transitivo (caso a cui possiamo limitarci) dovrà essere $k_4 \neq 0$, e noi potremo fare senz'altro $k_4 = 1$.

Scrivendo le equazioni di Killing relative ad a_{14}, a_{24}, a_{34} troviamo

$$p_{11} k_1 = 0$$
$$p_{21} k_1 = k$$
$$p_{31} k_1 = h.$$

Poichè $k \neq 0$, sarà $k_1 \neq 0$ e quindi

$$p_{11} = 0$$

Ricordiamo ora che

$$n_1 = -\pi_{11}; \qquad n_2 = -2\pi_{12}; \qquad n_3 = -2\pi_{13}.$$

e che, come si vede eliminando k_4 tra la prima e l'ultima delle (4)

$$(k n_2 + h n_3)^2 = 4 n_1.$$

Portando in questa i valori trovati di k, h si ottiene:

$$4 k_1^2 (p_{12} \pi_{12} + p_{13} \pi_{13})^2 = 4 n_1 = -4 \pi_{11}.$$

E poichè $p_{11} = 0$, sarà

$$p_{12} \pi_{12} + p_{13} \pi_{13} = 1$$

e quindi

$$k_1 = \sqrt{-\pi_{11}} = \frac{-\pi_{11}}{\sqrt{-\pi_{11}}}.$$

Si ha quindi, ricordando le (4),

$$k_2 = -\frac{\pi_{12}}{\sqrt{-\pi_{11}}} \qquad k_3 = -\pi_{13}\frac{1}{\sqrt{-\pi_{11}}}.$$

Si osservi che $\pi_{11} \neq 0$, perchè altrimenti sarebbe $k_1 = 0$ e quindi anche $k = 0$.

Le equazioni di Killing risultano senz'altro verificate, qualunque determinazione si dia a $\sqrt{-\pi_{11}}$; quindi un tale elemento lineare ammette per lo meno un G_7, perchè insieme alla X_6 ammette quella trasformazione infinitesima, che si deduce mutando il segno della $\sqrt{-\pi_{11}}$. Di questo caso però è inutile tener conto, perchè rientra in uno dei casi seguenti, possedendo questo G_7 come sottogruppo il $G_6 \equiv (X_1, \pi_{12} X_2 + \pi_{13} X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$ intransitivo.

Studiamo ora il caso (C). Vediamo se esso può ammettere un gruppo G_6. Scriveremo, per evitare equivoci, μ al posto di λ_{22}; cosicchè la composizione del G_5 corrispondente sarà:

$$(X_1\, X_5) = 2\mu X_1; \quad (X_2\, X_5) = \mu X_2; \quad (X_3\, X_5) = \mu X_3; \quad (X_4\, X_5) = 0$$
$$(X_1\, X_2) = (X_1\, X_3) = (X_1\, X_4) = 0; \quad (X_2\, X_3) = X_1;$$
$$(X_2\, X_4) = -X_3; \quad (X_3\, X_4) = X_2.$$

Sia $X_6 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ una trasformazione infinitesima che col precedente G_5 generi un G_6. E poniamo al solito

$$(X_i\, X_6) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} X_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \qquad (\alpha)$$

Scrivendo le identità di Iacobi si ha:

$$\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = 0. \qquad (1)$$

E sottraendo da X_6 convenienti multipli di X_2, X_3, X_4 si può fare:

$$\lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = 0. \qquad (2)$$

Se $\mu \neq 0$ sottraendo da X_6 un multiplo di X_5 si può fare $\lambda_{11} = 0$. Quindi potremo anche porre

$$\mu\, \lambda_{11} = 0. \qquad (3)$$

Ora se η_4 fosse costante, una combinazione lineare di X_5, X_6 darebbe una trasformazione infinitesima Y, in cui il coefficiente di x_4 sarebbe nullo. La Y con le X_1, X_2, X_3, X_4 genererebbe un gruppo intransitivo. Il nostro spazio ammetterebbe perciò un G_5 e quindi anche un G_6 intransitivo: caso che per ora escludiamo. Le identità di Iacobi dànno anche

$$\lambda_{15} = (\lambda_{56} - \mu)\lambda_{25} = (\lambda_{56} - \mu)\lambda_{35} = \lambda_{46}\lambda_{25} + \lambda_{35} = \lambda_{46}\lambda_{35} - \lambda_{25} = 0.$$

Per l'osservazione precedente una delle λ_{25}, λ_{35} non sarà nulla e quindi

$$\lambda_{56} = \mu; \qquad \lambda_{46} \neq 0.$$

Sia ora $\lambda_{56} = \mu = 0$. Dalle identità di Jacobi si trae

$$(X_5 X_6) = 0.$$

E poichè in questo caso $X_5 = -\frac{\partial}{\partial x_4}$, dovranno le η_i essere indipendenti da x_4. Ora è chiaramente:

$$\eta_4 = -\lambda_{25} x_3 + \lambda_{35} x_1 + \text{cost.}$$

Scriviamo le equazioni di Killing relative ad a_{14} e a_{34}.

Ne dedurremo, poichè $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_4} = 0$ che

$$\lambda_{25} = \lambda_{35} = 0$$

e quindi, contrariamente all'ipotesi, $\eta_4 = \text{cost.}$

Supponiamo dunque $\lambda_{56} = \mu \neq 0$.

Le identità di Iacobi dànno per le (1), (2), (3)

$$\lambda_{11} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \lambda_{45} = \lambda_{55} = \lambda_{32} = \lambda_{44} = \lambda_{53} =$$
$$= \lambda_{52} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = 0$$
$$\lambda_{46}\lambda_{34} - \lambda_{24} = \lambda_{46}\lambda_{24} + \lambda_{34} = 0.$$

Le (α) daranno per le η_i delle equazioni, che, per mezzo delle uguaglianze precedenti divengono

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = -\lambda_{13}; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = \lambda_{13} x_3; \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} = \lambda_{12}; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = \lambda_{24} x_3 + \mu \lambda_{25} x_1; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = \lambda_{24} \frac{x_1^2 - x_3^2}{2} + 2\mu\lambda_{25} x_2;$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = -\lambda_{24} x_1 + \lambda_{25}\mu x_3; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = \quad \lambda_{25}$$

$$\Sigma\left(-\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial \eta_i}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}-\eta_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\lambda_{34}X_4+\lambda_{35}X_5$$

ossia

$$-\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}-x_3\lambda_{13}=\lambda_{34}x_3+\mu\lambda_{35}x_1$$

$$-\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}+\lambda_{13}x_3^2-\eta_3=\lambda_{34}\frac{x_1^2-x_3^2}{2}+2\mu_1\lambda_{35}x_2$$

$$-\frac{\partial \eta_3}{\partial x_1}+x_3\lambda_{12}=\quad\lambda_{34}x_1+\lambda_{35}\mu x_3.$$

Scrivendo le condizioni di integralità otterremo:

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1\partial x_3}=\mu\lambda_{25}=-\lambda_{13}-\lambda_{34}\qquad\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_2\partial x_3}=\lambda_{13}=2\mu\lambda_{25}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_1\partial x_3}=\lambda_{21}x_1=\lambda_{13}x_3+\lambda_{21}x_1-\mu\lambda_{25}x_3+\lambda_{31}x_3.$$

La prima e l'ultima di queste equazioni dànno

$$\lambda_{13}+\lambda_{34}=\lambda_{25}=0.$$

Essendo $\lambda_{25}=0$ è per la $\lambda_{46}\lambda_{25}+\lambda_{35}=0$ anche

$$\lambda_{35}=0$$

contro il supposto.

Studiamo ora il caso di un gruppo G_5 del tipo (VII)''' e i corrispondenti spazii $(D)'''$. Per vedere quando un tale spazio ammette un G_6 useremo le notazioni usuali, e vedremo che aggiungendo a X_6 una conveniente trasformazione infinitesima del gruppo G_5 si può fare:

$$\lambda_{11}=\lambda_{31}=\lambda_{13}=0$$

Scrivendo al solito le identità di Iacobi si ha:

$$\lambda_{16}=\lambda_{36}=\lambda_{46}=\lambda_{23}=\lambda_{24}=\lambda_{51}=\lambda_{53}=\lambda_{54}=0$$

$$\lambda_{26}\lambda_{12}=\lambda_{26}\lambda_{14}=\lambda_{26}\lambda_{15}=\lambda_{26}\lambda_{32}=\lambda_{26}\lambda_{33}=\lambda_{26}\lambda_{34}=\lambda_{26}\lambda_{35}=0.$$

Sarà quindi, poichè

$$X_5=\frac{\partial}{\partial x_4},\qquad\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4}=\lambda_{55}+\lambda_{56}\eta_4;$$

poichè $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4}\neq 0$ e η_4 si può supporre non costante, come si vede ripetendo un

ragionamento testè usato, avremo che:

$$\lambda_{55} = \lambda_{16} = 0.$$

Sia ora anche $\lambda_{26} = 0$. In tal caso si ha poi, ricordando i valori delle $(X_1 X_6)$, $(X_2 X_6)$, $(X_3 X_6)$ che:

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = \lambda_{15} \qquad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = \lambda_{25} \qquad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = \lambda_{15} x_2 + \lambda_{35} .$$

Le condizioni di integrabilità dànno:

$$\lambda_{15} = 0.$$

E quindi:

$$\eta_4 = \lambda_{25} x_3 + \lambda_{35} x_1 + \text{cost.}$$

Dal valore della $(X_5 X_6)$ si trae quindi

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} = \lambda_{52} .$$

Analogamente si ha:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x_4} = 0.$$

Le equazioni di Killing per a_{41}, a_{42}, a_{43} dànno:

$$a_{31} \lambda_{52} = \lambda_{35}$$

$$a_{32} \lambda_{52} = 0$$

$$a_{33} \lambda_{52} = \lambda_{25} .$$

Poichè $a_{31} = 0$, sarà anche $\lambda_{35} = 0$.

Di più $a_{32} = n \psi e^{x_1}$ non è nullo, perchè $n \neq 0$ e perchè se $\psi = 0$, allora

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{34} = 0$$

e l'elemento lineare sarebbe degenere. È perciò $\lambda_{52} = 0$ e quind'anche $\lambda_{25} = 0$.

Sarebbe dunque, contro il supposto, $\eta_4 = \text{cost.}$

Sia invece $\lambda_{26} \neq 0$.

Avremo:

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = 0 ; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = \lambda_{25} + \lambda_{26} \eta_4 ; \quad \frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = 0.$$

E se ne trae scrivendo l'equazione di Killing per a_{34} che:

$$a_{33} \lambda_{52} = \lambda_{25} + \lambda_{26} \eta_4$$

donde si dedurrebbe che η_4 è, contro il supposto costante.

Studiamo ora il caso (VII)'' o D'' dove al posto di λ_{22} si scriva μ. E cominciamo dal caso che μ sia nullo. Questo caso si distingue dal precedente, perchè $n=0$ e quindi

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, d x_3^2 + \varphi\, e^{2 x_1} d x_2^2$$

dove φ e ψ sono costanti non nulle (perchè lo spazio non è degenere). Moltiplicando la X_4 per una conveniente costante e passando a uno spazio simile si può fare $\varphi = 1$. Moltiplicando poi la X_3 per una costante conveniente si può anche fare $\psi = 1$. Questo elemento lineare ammette infatti sempre un G_6; e coi soliti metodi si trova che:

$$X_6 = x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Sia ora $\mu \neq 0$, cosicchè

$$(X_2\, X_5) = \mu\, X_2.$$

Sia X_6 una sesta trasformazione infinitesima che con le X_1, X_2, X_3, $X_4\, X_5$, generi un G_6. E sia $(X_i\, X_6) = \sum_{k=1}^{k=6} \lambda_{ik} X_k$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Dalle identità di Iacobi si ha: $\lambda_{16} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = 0$. Mutando convenientemente X_6 si può fare $\lambda_{11} = \lambda_{31} = \lambda_{13} = 0$ e le identità di Iacobi dànno allora:

$$(X_1\, X_6) = (X_3\, X_6) = 0;$$

$$\lambda_{42} = \lambda_{43} = \lambda_{44} = \lambda_{45} = \lambda_{46} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{51} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = 0$$

$$\mu\, \lambda_{55} - \lambda_{26}\, \lambda_{52} = (\lambda_{56} - \mu)\, \lambda_{25} - \lambda_{26}\, \lambda_{55} = \lambda_{26}\, \lambda_{41} = \lambda_{56}\, \lambda_{41} = 0.$$

Poniamo $X_6 = \Sigma\, \eta_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ed esprimiamo che le $(X_i\, X_6)$ (per $i = 1, 3, 4$) hanno dei valori soddisfacenti alle precedenti equazioni.

Troveremo $\lambda_{41} = 0$ e quindi

$$\eta_1 = \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = \eta_3 (x_3,\, x_4); \quad \eta_4 = \eta_4 (x_3).$$

Esprimendo che $(X_2\, X_6)$ ha il valore che risulta dalle precedenti uguaglianze si trae:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = \mu\, \lambda_{25}\, x_3 + \lambda_{26}\, \eta_3 \qquad (\beta)$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = - \lambda_{25} + \lambda_{26}\, \eta_4. \qquad (\gamma)$$

Calcolando $(X_5 X_6)$ e sostituendovi per $\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}$ i valori qui trovati, si ha ricordando che $\lambda_{51} = \lambda_{53} = \lambda_{54} = 0$

$$\eta_4 = \frac{\mu \lambda_{25} x_3 - \lambda_{55}}{\mu \lambda_{26} x_3 - \lambda_{56}} . \qquad (\partial)$$

Donde, per la γ, si trae:

$$(- \lambda_{25} \lambda_{56} + \lambda_{26} \lambda_{55}) (\mu + \mu x_3 \lambda_{26} - \lambda_{56}) = 0. \qquad (\varepsilon)$$

Per maggior chiarezza osservo che il denominatore di (∂) non può essere nullo; chè, se $\lambda_{26} = \lambda_{56} = 0$, si avrebbe pure $\lambda_{25} = \lambda_{55} = 0$; quindi $(X_2 X_6) = 0$ ed η_4 sarebbe costante, mentre noi supponiamo, come è lecito per un'osservazione precedente, che η_4 non sia costante. Ricordando la (ε) e le relazioni tra le λ_{ik} dedotte dalle identità di Iacobi avremo che dovrà essere o

$$\lambda_{26} = \lambda_{56} - \mu = \lambda_{55} = 0$$

oppure

$$\lambda_{25} = \lambda_{55} = \lambda_{26} = 0$$

oppure

$$\lambda_{25} = \lambda_{55} = \lambda_{52} = 0.$$

Ma non può essere $\lambda_{25} = \lambda_{26} = 0$ perchè altrimenti, contrariamente all'ipotesi precedente, sarebbe $(X_2 X_6) = 0$. Nè può essere $\lambda_{25} = \lambda_{55} = 0$, perchè sarebbe $\eta_4 = 0$. Quindi dovrà essere

$$\lambda_{26} = \lambda_{56} - \mu = \lambda_{55} = 0.$$

Sarà per (∂)

$$\eta_4 = - \lambda_{25} x_3 .$$

Calcolando il valore di $(X_5 X_6)$ e usando delle precedenti identità si ottiene in fine:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} = \mu^2 \lambda_{25} x_3^2 - 2 \mu \eta_3 - \lambda_{52} .$$

Da questa e dalla (β) si trae (indicando con n_3 una costante)

$$\eta_3 = e^{-2\mu x_4} \left[\frac{\mu^2 \lambda_{25} x_3^2 - \lambda_{52}}{2 \mu} e^{2\mu x_4} + n_3 \right] = \lambda_{25} \mu \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4} - \frac{\lambda_{52}}{2 \mu} .$$

In η_3 lasciando la costante additiva, otteniamo in fine,

$$X_6 = \left(\lambda_{25} \mu \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} - \lambda_{25} x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} .$$

Si può naturalmente ammettere che $\lambda_{25} \neq 0$. Dividendo per λ_{25} otteniamo, mutando le notazioni,

$$X_6 = \left(\mu \frac{x_3^2}{2} + n_3 e^{-2\mu x_4}\right) \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Il nostro spazio ammette questo gruppo se

$$l_3 = -\frac{1}{2\mu n_3},$$

ossia se

$$\psi = -\frac{1}{2\mu n_3} e^{2\mu x_4},$$

perchè in tal caso le equazioni di Killing sono senz'altro verificate.

Passiamo al caso (VII)′, $(D)'$ e, cangiando le notazioni, poniamo:

$$(X_2 X_5) = \mu X_5 \qquad (\mu \neq 0).$$

Le equazioni dedotte dalle identità di Iacobi danno, usando delle solite notazioni,

$$\lambda_{16} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0.$$

Mutando convenientemente X_6 si vede che si può fare:

$$\lambda_{11} = \lambda_{31} = \lambda_{13} = \lambda_{55} = 0.$$

Le identità di Iacobi dànno allora che sarà:

$$(X_i X_6) = 0 \;\; (i = 1, 3, 4); \quad (X_2 X_6) = \lambda_{25} X_5 + \lambda_{26} X_6; \quad (X_5 X_6) = \lambda_{52} X_2$$
$$(\lambda_{26} - \mu)\lambda_{52} = 0.$$

Posto

$$X_6 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

otteniamo, scrivendo che $(X_i X_4) = 0$ $(i = 1, 3, 4)$, $\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = 0$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = \eta_3(x_3, x_4); \quad \eta_4 = \eta_4(x_3).$$

Ricordando i valori di $(X_2 X_6)$, $(X_5 X_6)$ si ottiene:

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = \lambda_{25} \nu_3 e^{\mu x_3} + \lambda_{26} \eta_3 \qquad (\alpha)$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = -\lambda_{25} e^{\mu x_3} + \lambda_{26} \eta_4 \qquad (\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\mu x_3}\nu_3\left(\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3}+\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)-e^{\mu x_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_4}-\eta_3\mu\, e^{\mu x_3}\left(\nu_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}\right)- \\ \qquad -\eta_4\, e^{\mu x_3}\nu'\frac{\partial}{\partial x_3}=\lambda_{25}\frac{\partial}{\partial x_3}. \end{array}\right\} \quad (\gamma)$$

Osservando il coefficiente di $\frac{\partial}{\partial x_4}$ in quest'ultima formula, otteniamo:

$$\eta_3=-\frac{\nu_3}{\mu}\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}.$$

E la (α) diventa perciò

$$\frac{\partial^2 \eta_4}{\partial x_3^2}-\lambda_{26}\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}+\lambda_{25}\,\mu\, e^{\mu x_3}=0. \quad (\partial)$$

Sia ora $\lambda_{26}=\mu$.
Ne dedurremo, indicando con n_4, m_4 delle costanti

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3}=e^{\mu x_3}(-\lambda_{25}\,\mu\, x_3+n_4)$$

$$\eta_4=\frac{n_4}{\mu}e^{\mu x_3}-\lambda_{25}\,x_3\,e^{\mu x_3}+\lambda_{25}\frac{e^{\mu x_3}}{\mu}+m_4.$$

La (β) diventa:

$$m_4=0.$$

Annullando il coefficiente di $\frac{\partial}{\partial x_3}$ nella (γ) otteniamo

$$\lambda_{25}\left(\nu_3^2-\frac{\nu'_3}{\mu}\right)=0=\lambda_{52}.$$

E quindi

$$\lambda_{25}=\lambda_{52}=0$$

donde

$$X_6=\frac{n_4\,e^{\mu x_3}}{\mu}\left\{-\nu_3\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}\right\}.$$

Ossia, poichè X_6 non può esser nulla,

$$X_6=e^{\mu x_3}\left(\nu_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

che coincide con la X_5.

Sia ora invece $\lambda_{26} \neq \mu$. Avremo indicando con n_4, m_4 delle costanti,

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = e^{\lambda_{26} x_3} \left(\frac{\lambda_{25}\, \mu\, e^{(\mu - \lambda_{26}) x_3}}{\lambda_{26} - \mu} + n_4 \right)$$

$$\eta_4 = n_4 \int e^{\lambda_{26} x_3}\, d\, x_3 + \frac{\lambda_{25}}{\lambda_{26} - \mu}\, e^{\mu x_3} + m_4$$

$$\eta_3 = -\frac{\nu_3}{\mu} \left\{ n_4\, e^{\lambda_{26} x_3} + \frac{\mu\, \lambda_{25}}{\lambda_{26} - \mu}\, e^{\mu x_3} \right\}.$$

Sia $\lambda_{26} = 0$. La (β) e la (γ) danno $n_4 = 0$; $\lambda_{52} = -m_4\, \nu'_3$; ma, poichè, com'è ben chiaro, la derivata di ν_3 non può essere una costante, sarà anche $m_4 = \lambda_{52} = 0$.

Se invece $\lambda_{26} \neq 0$, le (β) e (γ) dànno:

$$m_4 = 0$$

$$\nu_3^2 \left\{ e^{\mu x_3} \frac{\lambda_{25}\, \lambda_{26}}{\lambda_{26} - \mu} + n_4\, e^{\lambda_{26} x_3} \right\} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \nu'_3\, n_4\, e^{\lambda_{26} x_3} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda_{26}}\right) = \lambda_{52}.$$

Donde, poichè $\lambda \neq \mu \neq 0$, si ottiene, ordinando secondo le potenze di e^{x_3} e ricordando il valore di ν_3 che

$$\lambda_{52} = n_4 = 0.$$

In ambi i casi la X_6 si riduce a meno di un fattore costante alla X_5 stessa: di questo caso è perciò inutile occuparci.

Così pure, dal nostro punto di vista, è inutile occuparci dei casi (E) che sono identici (a meno di una trasformazione immaginaria) coi casi (D).

Abbiamo così determinati tutti i possibili elementi lineari che ammettono un G_6. I nostri procedimenti ci dimostrano che per trovare tutti quegli elementi lineari che ammettono un G_7 o un G_8 basterà vedere quali tra questi ultimi ammettono oltre al G_6 corrispondente un gruppo più ampio.

E cominceremo dapprima studiando quegli elementi lineari che ammettono un G_6 transitivo, senza ammettere un G_6 intransitivo, riservandoci a più tardi questa ultima ricerca.

Di cosiffatti elementi lineari esistono i soli due:

$$d\, s^2 = d\, x_4^2 + d\, x_1^2 + d\, x^2 + e^{2 x_1}\, d\, x_2^2 \qquad \text{(A)}$$

$$d\, s^2 = d\, x_4^2 + l_1\, d\, x_1^2 + l_2\, e^{2 x_1}\, d\, x_2^2 + l_3\, e^{2 \mu x_1}\, d\, x_3^2. \qquad \text{(B)}$$

dove l_1, l_2, l_3, μ sono costanti non nulle. Il tipo (B) include (per $\mu = 0$) il tipo A. Se $\mu \neq 0$, moltiplicando x_3, x_4 per costanti opportune e passando a

uno spazio simile, potremo scrivere:

$$d s^2 = d x_4^2 + l_1 d x_1^2 + e^{2x_1} d x_3^2 + l_2 e^{2x_1} d x_2^2 . \tag{C}$$

Lo studio di questi elementi lineari si compie senz'altro facilmente col metodo del prof. Bianchi. Cominciamo dall'elemento (A)

$$d s^2 = d x_4^2 + d x_1^2 + d x_3^2 + e^{2x_1} d x_2^2 .$$

Se

$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

è la più generale trasformazione infinitesima che esso ammette, le formole di Killing dànno:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_1}; \quad e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0 \quad \xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0 \quad e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0. \tag{3}$$

Poichè per le (2) $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0$, l'ultima delle (2) e la prima delle (3) dànno:

$$\xi_2 = \frac{e^{-2x_1}}{2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \eta_2 (x_2, x_3, x_4) \tag{4}$$

$$\xi_3 = - x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \eta_3 (x_2, x_3, x_4). \tag{5}$$

La (2) e le (3) dànno quindi

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \xi_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = 0 ; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} = 0. \tag{6}$$

Per ottenere queste formole basta sostituire le (4) e (5) nelle (2) e (3) e ricordare che ξ_1, η_2, η_3 non contengono x_1. D'altra parte dalle (1) si ottiene, ricordando che ξ_1 non può contenere x_1,

$$\xi_1 = - x_4 \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} + Z_1 (x_2, x_3); \quad \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_1^2} = 0 \tag{7}$$

$$\xi_2 = - x_4 e^{-2x_1} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} + Z_2 (x_1, x_2, x_3) \tag{8}$$

$$\xi_3 = - x_4 \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} + Z_3(x_1, x_2, x_3). \tag{9}$$

La prima delle (2) e le (6) dicono, ricordando che per la (7) ξ_1 è funzione lineare di x_4, che

$$\xi_1 = a x_2 + b x_3 + x_4 (d x_2 + e x_3 + f) + g = - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}$$

dove a, b, c, d, e, f, g sono costanti.

Poichè per la (8) ξ_2 è lineare in x_4 e indipendente da x_3 ne trarremo:

$$b = e = 0$$

$$\eta_2 = - (a + d x_4) \frac{x_2^2}{2} - (f x_4 + g) x_2 + m x_4 + n$$

dove m, n sono nuove costanti.

Poichè per le (6) ξ_3 non contiene nè x_2, x_3 e per la (9) è lineare in x_4, avremo:

$$\xi_3 = - k x_4 + l$$

dove k, l sono costanti.

Le (1) dànno allora:

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = - (d x_2 + f)$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} = k$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} = - \frac{d}{2} + d \frac{x_2^2}{2} e^{2x_1} + f \xi_2 e^{2x_1} - m e^{2x_1}$$

eguagliando i valori di $\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_1 \partial x_2}$ che si deducono dalla prima e dalla terza di queste formole, si ottiene:

$$m = d = f = 0.$$

Si ha dunque

$$\xi_1 = a x_2 + g$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} a e^{-2x_1} - a \frac{x_2^2}{2} - g x_2 + n$$

$$\xi_3 = - k x_4 + l$$

$$\xi_4 = k x_3 + t$$

dove t è una nuova costante. Questo elemento lineare ammette dunque proprio un G_6.

Studiamo il tipo (C)

$$d s^2 = d x_4^2 + l_1 d x_1^2 + e^{2x_1} d x_3^2 + e^{2x_1} l_1 d x_2^2$$

dove l_1 è una costante non nulla. Le equazioni di Killing per a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{14}, a_{24}, a_{34} dànno:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0; \quad \xi_4 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0; \quad l_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_1}; \quad e^{2x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_3};$$

$$\xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0; \quad l_1 e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial \xi_4}{\partial x_2}.$$

Le condizioni di integrabilità dànno:

$$\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_3^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial x_4} = -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{l_1} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = -\frac{1}{l_1} e^{-2x_1} \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_2^2}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x_2^2} + e^{2x_1} \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} = 0.$$

Queste equazioni per ξ_4 ci dicono che sarà

$$\xi_4 = (a x_2 + b) x_3 + c x_2 + d,$$

dove a, b, c, d sono costanti. E quindi si dedurrà dalle equazioni precedenti:

$$\xi_1 = \eta_1 (x_2, x_3) = -\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{l_1} e^{-2x_1} (a x_3 + c) x_4 + \eta_2 (x_1 x_2 x_3)$$

$$\xi_3 = \frac{e^{-2x_1}}{2} (a x_2 + b) + \eta_3 (x_1 x_2 x_3).$$

Poichè $\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \xi_4 = 0$, avremo:

$$(a x_2 + b) x_3 + c x_2 + d + \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = 0$$

donde

$$\eta_3 = -\frac{a x_1 + b}{2} x_3^2 - (c x_2 + d) x_3 + Z_3 (x_1, x_2).$$

Le equazioni di KILLING per a_{12}, a_{23}, a_{31} dànno:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0$$

$$l_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + e^{3x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0$$

$$l_1 e^{2x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + e^{2x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0.$$

Sostituendo per le ξ_1, ξ_2, ξ_3 i valori precedenti, troviamo, ricordando che $\eta_1(x_2 x_3) = -\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}$ e che quindi si può scrivere

$$\eta_2(x_1 x_2 x_3) = Z_2(x_1, x_3) + \lambda_2(x_2, x_3)$$

$$\eta_1 = -\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}$$

le relazioni seguenti: (α), (β), (γ)

$$\left.\begin{aligned} & l_1 e^{2x_1}\left[-\frac{1}{l_1} a e^{-x_1} x_4 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3}\right] + \\ & + e^{2x_4}\left[\frac{a}{2} e^{-2x_4} - \frac{a}{2} x_3^2 - c x_3 + \frac{\partial Z_3(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

donde

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_2} = 0; \quad a = c = 0; \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} = 0$$

ossia $\eta_2 = Z_2(x_1) + \lambda_2(x_2)$

$$l_1 \frac{\partial \eta_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} + e^{2x_1} \frac{\partial Z_3}{\partial x_1} = 0 \qquad (\beta)$$

donde deduciamo:

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = 0$$

$$-l_1 \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x_2^2} + l_1 e^{2x_1} \frac{\partial Z_2}{\partial x_1} = 0 \qquad (\gamma)$$

donde, indicando con k una costante,

$$\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x_2^2} = k \quad \frac{\partial Z_2}{\partial x_1} = -k e^{-2x_1}.$$

Ricordando queste relazioni, indicando con h, l, m, n nuove costanti

avremo infine:

$$\xi_1 = -(k\,x_2 + l)$$

$$\xi_2 = \frac{k}{2}(x_2^2 - e^{-2x_1}) + l\,x_2 + (h + m)$$

$$\xi_3 = \frac{b}{2}\,e^{-2x_1} - \frac{b}{2}\,x_3^2 - d\,x_3 + n$$

$$\xi_4 = b\,x_3 + d.$$

Le costanti h, m compaiono solo nella loro combinazione « $h + m$ ». Il gruppo ammesso dal nostro spazio è perciò proprio soltanto un G_6.

Basterà ora lo studio di quegli S_4 che ammettono un G_6 intransitivo; questo studio si compie senz'altro, seguendo quasi parola per parola, lo studio che il prof. Bianchi fa degli S_3 che ammettono un G_3 intransitivo.

Cominciamo dal tipo (L) che scriveremo, mutando un po' le notazioni:

$$d\,s^2 = d\,x_1^2 + \varphi^2 (d\,x_2^2 + d\,x_3^2 + d\,x_4^2)$$

dove φ è una funzione non nulla di x_1.

Sia

$$X = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

una trasformazione infinitesima ammessa da questo spazio. Avremo per le equazioni di Killing

$$\varphi^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\varphi'}{\varphi}\xi_1 + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\varphi^2 \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\varphi^2 \frac{\partial \xi_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} + \frac{\partial \xi_4}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}\xi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_4}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}\xi_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0.$$

Lo stesso procedimento seguito dal prof. Bianchi al § 7 della sua Me-

moria dimostra che lo spazio ammetterà un gruppo più ampio soltanto se

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \text{cost}$$

ossia se lo spazio è a curvatura costante.

Veniamo ora al tipo (M) in cui

$$d s^2 = d x_1^2 + \varphi^2 (x_1) \{ d x_2^2 + e^{2x_2} d x_3^2 + e^{2x_2} d x_4^2 \}.$$

Le equazioni di KILLING dànno, indicando con

$$\Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

la più generale trasformazione infinitesima ammessa dallo spazio,

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = -\frac{\varphi'}{\varphi} \eta_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} = -\frac{e^{-2x_2}}{\varphi^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = -\frac{\varphi'}{\varphi} \eta_1 - \eta_2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_4} = -\frac{\varphi'}{\varphi} \eta_1 - \eta_2 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial x_1} = -\frac{e^{-2x_2}}{\varphi^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} + e^{2x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_4} + e^{2x_2} \frac{\partial \eta_4}{\partial x_2} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x_4} + \frac{\partial \eta_4}{\partial x_3} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0. \tag{10}$$

Lo studio di questo sistema di equazione è analogo a quello che il prof. BIANCHI fa nel § 10 della Memoria citata. Noi lo ripeteremo sommariamente. Eliminando η_2 dalle (1) e (2), η_3 dalle (3) e (4), η_4 dalle (5) e (6)

troviamo:

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = (\varphi'' \varphi - \varphi'^2)\,\eta_1$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_3^2} = e^{2x_2}(\varphi'' \varphi - \varphi'^2)\,\eta_1 - e^{2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_4^2} = e^{2x_2}(\varphi'' \varphi - \varphi'^2)\,\eta_1 - e^{2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}.$$

Osservando che per $\eta_1 = 0$ troviamo soltanto il G_6 iniziale, potremo supporre $\eta_1 \neq 0$ e quindi

$$\varphi'' \varphi - \varphi'^2 = c \text{ (costante)}$$

indi

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = c\,\eta_1 \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_3^2} = e^{2x_2}\left(c\,\eta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_4^2} = e^{2x_2}\left(c\,\eta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_4}\right). \tag{13}$$

Le (1), (3), (6) integrate rispetto a x_1 dànno:

$$\eta_2 = -\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\int \frac{d x_1}{\varphi^2(x_1)} + \psi_2(x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{14}$$

$$\eta_3 = -\,e^{-2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3}\int \frac{d x_1}{\varphi^2(x_1)} + \psi_3(x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{15}$$

$$\eta_4 = -\,e^{-2x_2}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4}\int \frac{d x_1}{\varphi^2(x_1)} + \psi_4(x_2,\ x_3,\ x_4). \tag{16}$$

Sostituendo nelle (7), (8) troviamo:

$$2\left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2\, \partial x_3} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3}\right)\int \frac{d x_1}{\varphi^2(x_1)} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + e^{2x_2}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}$$

e l'equazione che se ne deduce mutando x_3, ψ_3 in x_4, ψ_4.

Da cui si trova (cfr. loc. cit)

$$(c-1)\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} = (c-1)\frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} = 0.$$

Per $c = 1$ si ha, indicando con R una costante

$$\varphi(x_1) = R \cosh\left(\frac{x_1}{R}\right)$$

col che si ritorna agli spazii a curvatura costante.

Se $c \neq 1$, allora η_1 può essere funzione soltanto di x_2. Le (11), (12), (13) diventano

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = c\,\eta_1 \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = c\,\eta_1$$

e quindi, poichè $c \neq 1$,

$$c = 0 \qquad \eta_1 = \text{cost.}$$

Potremo senz'altro supporre che $\eta_1 = 1$; di più, poichè

$$\varphi\varphi'' - \varphi'^2 = c = 0$$

avremo

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = k \text{ (costante).}$$

Le (14), (15, (16) dànno:

$$\eta_i = \psi_i(x_2,\ x_3,\ x_4) \qquad (i = 2,\ 3,\ 4)$$

col che le formule di KILLING diventano:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + k = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + k + \psi_2 = \frac{\partial \psi_4}{\partial x_4} + k + \psi_2 = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + e^{2x_2}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} + e^{2x_2}\frac{\partial \psi_4}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_3} = 0.$$

Donde

$$\psi_2 = -k\,x_2 + \theta(x_3,\ x_4)$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} = e^{-2x_2}\frac{\partial \theta}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} = -k + k\,x_2 - \theta(x_3,\ x_4).$$

La condizione di integrabilità di queste ultime due dà:

$$e^{-2x_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + k = 0$$

donde

$$k = 0.$$

Si può quindi supporre $\varphi = 1$.

Il resto della discussione si può senz'altro omettere; infatti in tal caso il nostro spazio, avendo i coefficienti dell'elemento lineare indipendenti da x_1 ammette la trasform. infinitesima $X_7 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ e quindi ammette un G_7.

Nè può ammettere un gruppo più ampio perchè se

$$X_8 = \Sigma \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

fosse un'ottava trasform. infinitesima non appartenente a G_7 ammessa dal nostro spazio si potrebbe, per quanto si vide supporre $\eta_1 = 1$; e allora $X_8 - X_7$ insieme alle trasformazioni infinitesime di G_6 farebbe parte di un gruppo a 7 o più parametri intransitivo. Ciò che è impossibile.

§ 16. Finita così la rassegna degli S_4, che ammettono un gruppo di movimenti, riprenderemo, con le nuove cognizioni e i nuovi metodi appresi, a studiare la questione se un S_4 che ammetta un G_4 intransitivo non integrabile ammette, o no, un gruppo più ampio di movimenti per valori generici delle costanti di integrazione.

I due tipi di G_4 cosiffatti che noi abbiamo trattato a parte, sono del resto dal nostro generale punto di vista da considerarsi come identici.

Noi potremo perciò senz'altro trattare il caso che le trasformaz. infinitesime X_1, X_2, X_3, X_4 generatrici di G_4 siano tali che

$$(X_1 X_2) = X_1 \qquad (X_1 X_3) = 2 X_2 \qquad (X_2 X_3) = X_3$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0.$$

Poichè, come risulta dalla Memoria del prof. Bianchi, un S_3 che ammetta un G_3 non integrabile non ammette in generale anche un G_4, è ben certo che un S_4 che ammette il nostro G_4 non ammetterà nel caso generale una trasformazione infinitesima che con X_1, X_2, X_3 generi un gruppo intransitivo. Di più osserviamo che se un tale S_4 ammette un gruppo più ampio del G_4 stesso ammetterà un G_5, o un G_6, o un G_7, o un G_{10}.

Se esso ammette un G_5 questo G_5 contenendo G_4 non sarà integrabile e avrà una delle composizioni (21) e (22) del § 15. Anzi poichè una quinta trasformazione infinitesima di G_5 indipendente da X_1, X_2, X_3, X_4 non può avere nullo di coefficiente di $\frac{\partial}{\partial x_4}$, in causa dell'osservazione precedente, il gruppo dovrà proprio avere la composizione (22). Avremmo cioè:

$$(X_i X_5) = (X_i X_4) = (X_4 X_5) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (X_1 X_2) = X_1;$$
$$(X_1 X_3) = 2 X_2; \quad (X_2 X_3) = X_3.$$

Essendo $(X_i X_5) = 0$ ed $(X_1 X_2 X_3 X_5)$ essendo per l'osservazione precedente certo transitivo la X_5 dovrebbe essere della stessa forma di X_4, che noi abbiamo determinato al § 11 della Mem. cit. però con valori differenti per le α, β, γ. Ed è ora ben chiaro che il sistema di equazioni per le a^2, b, c, d, e, f del § 13 della mia Mem. cit. non può restare equivalente a sè stesso, quando vi si mutino i valori delle α, β, γ: ciò che sarebbe necessario affinchè, restando generici i valori delle costanti a^2, b, c, d, e, f, α, β, γ il nostro spazio ammettesse un G_5 della composizione su riferita.

Ammetta ora un tale S_4 un G_6 (certamente transitivo) oppure un G_7.

Ammetta p. es. uno dei G_6 transitivi del § 15. Se il G_6 è del tipo (A) esso ha per composizione:

$$0 = (X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = (X_2 X_5) = (X_1 X_5) =$$
$$= (X_3 X_5) = (X_4 X_5) = (X_1 X_6) = (X_3 X_6) = (X_4 X_6),$$
$$(X_1 X_4) = X_3; \quad (X_2 X_6) = -X_5; \quad (X_5 X_6) = X_2;$$
$$(X_1 X_3) = X_1; \quad (X_3 X_4) = -X_4.$$

Il nostro G_4 contiene un G_3 non integrabile, che (come il G_4 stesso) deve essere un sottogruppo del G_6 precedente. Tutti i successivi gruppi derivati di G_6 devono contenere il G_3 stesso. E poichè derivando due volte il G_6 otteniamo il gruppo (X_1, X_3, X_4), questo sarà proprio il G_3 in discorso. La quarta trasformazione di G_4 dovendo essere permutabile con X_1, X_3, X_4 sarà del tipo $\lambda X_2 + \mu X_5 + \nu X_6$. Ma ciò non è possibile perchè allora G_4 non sarebbe transitivo, essendo X_1, X_3, X_4 trasformazioni infinitesime dipendenti.

Considerazioni analoghe valgono per il caso (C).

Vediamo infine il caso che ogni tale S_4 ammetta un G_7, contenente per sottogruppo un G_6 intransitivo. Questo G_7 avrà la composizione

$$(X_1 X_2) = X_1 \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 \quad (X_2 X_3) = X_3$$
$$(X_i X_7) = 0 \quad i = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$
$$(X_4 X_5) = X_4 \quad (X_4 X_6) = 2 X_5 \quad (X_5 X_6) = X_6$$
$$(X_1 X_4) = (X_1 X_5) = (X_1 X_6) = (X_2 X_4) = (X_2 X_5) = (X_2 X_6) =$$
$$= (X_3 X_4) = (X_3 X_5) = (X_3 X_6) = 0.$$

Come sopra si vede che il gruppo G_3 semplice contenuto in X_4 dev'essere un sottogruppo di X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6. Ora i gruppi semplici di questo G_6 sono equivalenti (Lie, 3[tes] B., pag. 203) a uno dei gruppi

$$(X_1, X_2, X_3); \quad (X_4, X_5, X_6); \quad (X_1 + X_4, X_2 + X_5, X_3 + X_6).$$

Ma questi tre gruppi hanno tutti delle V_3 invarianti, che dovrebbero coincidere con le varietà $x_4 =$ cost. del § 12, che appunto si definivano come le varietà a tre dimensioni lasciate fisse dal gruppo G_3 semplice contenuto in G_4; quindi queste varietà dovrebbero ammettere tutto il G_6 in discorso per valori qualsiasi delle costanti di integrazione: ciò che noi sappiamo escluso « *a priori* ».

Osservazione. Si dovrebbero ancora (cfr. pag. 34) studiare quegli G_4 che, senza ammettere un G_6 intransitivo, ammettono un G_4, le cui varietà invarianti sono a curvatura costante. Studiamo uno dopo l'altro i varii tipi di G_4 sottogruppi del gruppo totale di movimenti di una superficie a curvatura costante (*).

I. caso. Sia il G_4 generato dalla $(X_1\, X_2\, X_3\, X_4)$ legate da $(X_1\, X_2) = X_3$; $(X_2\, X_3) = X_1$; $(X_3\, X_1) = X_2$; $(X_i\, X_4) = 0\ (i = 1,\ 2,\ 3)$. Allora (Bianchi loc. cit. pag. 70-72) posto $d\,s^2 = d\,x_4^2 + \sum_1^3 a_{ik}\,d\,x_i\,d\,x_k$ avremo:

$$\left.\begin{aligned} d\,s^2 = d\,x_4^2 + \varphi\,d\,x_1^2 + [\varphi \operatorname{sen}^2 x_1 + n^2 \psi \cos^2 x_1]\,d\,x_2^2 + \\ + 2\,n\,\psi \cos x_1\,d\,x_2\,d\,x_3 + \psi\,d\,x_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4; le $x_4 =$ cost. sono a curvatura costante soltanto se $\varphi = n^2\psi$; ma in questo caso lo spazio (1) ammette proprio un G_6 intransitivo.

II. caso, il G_4 generato dalle $(X_1\, X_2\, X_3\, X_4)$ ha la composizione

$$\left.\begin{aligned} (X_1\, X_2) = 0 \quad (X_1\, X_3) = X_1 \quad (X_2\, X_3) = X_2; \quad (X_1\, X_4) = X_2; \\ (X_2\, X_4) = -X_1; \quad (X_3\, X_4) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Siano le $x_4 =$ cost. le varietà invarianti e sia $d\,s^2 = \sum_1^3 a_{ik}\,d\,x_i\,d\,x_k + d\,x_4^2$.

Dalla composizione del sottogruppo $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ che si può immaginare transitivo nelle varietà x_4 si trae (Bianchi, loc. cit., pag. 49) che una delle $x_4 =$ cost. si potrà supporre abbia l'elemento lineare

$$d\,s^2 = d\,x_1^2 + e^{-2x_1}(d\,x_2^2 + d\,x_3^2).$$

La X_4 deve essere un movimento per questa e deve soddisfare alle (2).

(*) Cfr. Lie, Bd. IIItes.

Potremo dunque supporre:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

e l'elemento lineare cercato sarà

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi\, e^{-2x_1} (d x_2^2 + d x_3^2) \tag{3}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4. Se esiste un gruppo G_5 contenente detto G_4 che possa essere un movimento per lo spazio (3) si riconosce coi soliti metodi che la sua quinta trasformazione X_5 (che per ipotesi non può lasciar fisse le $x_4 = \text{cost.}$) si può immaginare del tipo $X_5 = a \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}$ $(a = \text{cost.})$ oppure del tipo $X_5 = e^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_4} + \lambda_1 (x_4) \frac{\partial}{\partial x_1}\right]$. Nel primo caso è $\varphi = \text{cost.}$; $\psi = e^{2ax_4}$; e mutando i parametri x_1, x_4 in loro combinazioni lineari si trova il tipo già noto $d s^2 = d x_4^2 + k\, d x_1^2 + e^{-2x_1} (d x_2^2 + d x_3^2)$ $(k = \text{cost.})$. Nell'ultimo caso si ha dalle formule di Killing $\psi' - 2 \lambda_1 \psi = \varphi' + 2 \lambda_1 \varphi = 0$.

Il gruppo G_4 generato da X_1, X_2, X_3, X_5 ha per varietà minime invarianti le varietà $\int \lambda_1\, d x_4 - x_1 = \text{cost.}$ che chiaramente per la $\psi' - 2 \lambda_1 \psi = 0$ sono euclidee; rientriamo così nell'ultimo caso che ora tratteremo che il nostro spazio ammetta un G_4, le cui varietà minime invarianti sono euclidee.

III caso. Sia G_4 generato dalle X_1, X_2, X_3, X_4 e ammetta delle varietà euclidee $x_4 = \text{cost.}$ come varietà invarianti; potremo porre:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Le formule di Killing ci dànno:

$$d s^2 = d x_4^2 + \varphi\, d x_1^2 + \psi (d x_2^2 + d x_3^2) \tag{4}$$

dove φ, ψ sono funzioni di x_4. Una trasformazione X_5 che non lasci fisse le $x_4 = \text{cost.}$, e che con le precedenti generi un gruppo che si possa considerare gruppo di movimenti per uno spazio (4) è, come tosto si vede di uno dei due tipi:

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_4} + \beta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \quad (\beta = \text{cost.}; \quad \gamma = \text{cost.})$$

$$X_5 = e^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_4} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right] \qquad \lambda_1 = \lambda_1 (x_4)$$

a meno di una combinazione lineare delle X_1, X_2, X_3, X_4.

Nel secondo caso è per le formule di Killing $\psi = \text{cost.}$; di più le varietà $x_2 = \text{cost.}$; $x_3 = \text{cost.}$ ammettono pure la X_5 e sono perciò a curvatura costante. Mutando i parametri x_1, x_4 si ha quindi:

$$d s^2 = d x_3^2 + d x_2^2 + d x_4^2 + e^{-2x_4} d x_1^2$$

oppure

$$d s^2 = d x_3^2 + d x_2^2 + d x_4^2 + \cos^2 x_4 \, d x_1^2$$

oppure

$$d s^2 = d x_3^2 + d x_2^2 + d x_4^2 + d x_1^2$$

casi che tutti rientrano in tipi già noti. Nel primo caso si trova dalle formule di Killing $\varphi = c_{11} e^{-2\beta x_4}$, $\psi = c_{22} e^{-2\gamma x_4}$ ($c_{11} = \text{cost.}$; $c_{22} = \text{cost.}$). Se $\beta = \gamma = 0$ lo spazio è euclideo, se $\beta = 0$ oppure se $\gamma = 0$, abbiamo ancora tipi già studiati; potremo dunque supporre $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Sia, se possibile, $X_6 = \Sigma \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ una trasformazione che con le precedenti generi un gruppo di movimenti per (4); per le formule di Killing sarà $\frac{\partial \xi_4}{\partial x_4} = 0$; di più $\xi_4 \neq \text{cost.}$ perchè altrimenti $X_6 - \xi_4 X_5$ lascerebbe fisse le $x_4 = \text{cost.}$; caso che per noi è escluso, perchè altrimenti l'elemento (4) ammetterebbe tutto un G_6 intransitivo. Posto

$$(X_i X_6) = \sum_k \lambda_{ik} X_k$$

si ha dalle formule di composizione e dalle $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ che $\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = 0$; e quindi $\xi_4 = \lambda_{35} x_1 + \lambda_{15} x_2 + \lambda_{25} x_3 + d$, dove d è una costante che, scrivendo X_6 al posto di $X_6 - d X_5$, si può supporre nulla. Dalle

$$(X_i X_6) = \sum_k \lambda_{ik} X_k \quad (i = 1, 2, 4)$$

si trae tosto che ξ_2, ξ_3 sono soltanto funzioni di x_2, x_3 e quindi per le formule di Killing relative ad a_{24}, a_{34} che ξ_4 non dipende da x_2, x_3 ossia che $\lambda_{15} = \lambda_{25} = 0$. Scrivendo la $(X_3 X_6) = \sum_k \lambda_{3k} X_k$ si trova tosto che $\lambda_{35} \gamma = 0$ e poichè $\gamma \neq 0$ se ne trae $\lambda_{35} = 0$; sarebbe quindi $\xi_4 = 0$, ciò, che come abbiamo già osservato, è contrario alla nostra ipotesi.

È così esaurita completamente la nostra discussione.

LUIGI CREMONA

(n. Pavia 7-XII-1830 — m. Roma 10-VI-1903).

Con animo commosso e profondamente addolorato compio il mesto ufficio di annunciare ai lettori degli *Annali* la morte del prof. **Luigi Cremona,** avvenuta in Roma il 10 giugno del corrente anno.

Un male insidioso ne aveva per molti e molti mesi minato la vita preziosa, procurando a Lui sofferenze atroci sopportate con stoico coraggio, alla famiglia e agli amici ansiose preoccupazioni, ch'egli cercava di dissipare accudendo ai varî suoi uffici con la consueta attività, appena le forze glielo consentivano; sicchè anche per la moglie affezionata, che pur da tanto tempo lo assisteva con assidue amorose cure, la crisi temuta giunse quasi improvvisa; e quando i figli assenti, chiamati d'urgenza, accorsero a Roma, ebbero bensì il conforto di trovare il padre ancora vivente, ma per lunghe e lunghe ore subirono lo strazio di vederlo agonizzare senza mai riudirne la cara voce.

Insegnante limpido ed elegante, scienziato dotto e geniale, **Luigi Cremona** venuto meritamente in gran fama appartenne a tutte le principali Accademie e Istituti scientifici italiani ed esteri; e col Brioschi, di cui fu l'allievo prediletto, e insieme a Betti, Genocchi, Beltrami, Casorati ed altri egli contribuì fortemente al risveglio e al rinnovamento degli studî matematici in Italia: onde il cordoglio universale per la perdita di un tanto maestro e in particolare la riconoscenza imperitura degli studiosi italiani per Chi ne ha portato sì alto la scienza matematica, da rendere la nostra non ultima fra le nazioni colte che contribuiscono al progresso del sapere.

Collaboratore dei vecchi *Annali di Matematica* già editi in Roma dal Tortolini, condirettore fino dal 1867 dei nuovi *Annali di Matematica* (in quell'anno appunto, e da allora in poi, per iniziativa del Brioschi pubblicati

in Milano) **Luigi Cremona** lascia nella Direzione di questo periodico un gran vuoto e un senso di viva gratitudine e di amaro rimpianto.

Della sua operosità scientifica e didattica, svoltasi nel lungo periodo che corre dal 1857 fino ad oggi, del singolare suo intuito geometrico, del poderoso suo ingegno, della vasta sua coltura, Egli ha lasciato documenti preziosi, sia nelle numerose e importanti sue Memorie, inserite in questi *Annali* o sparse in molti periodici scientifici ed atti accademici, sia in opere didattiche pubblicate a parte e che, apprezzate anche all'estero, furono tosto tradotte in lingue diverse.

Nell'impossibilità di dare ora un'idea anche sommaria di tanti lavori — sicuro di farmi interprete di tutti i cultori delle scienze matematiche — esprimo qui il voto che essi ordinati e raccolti vengano pubblicati tutti insieme. Una tale pubblicazione porrà in rilievo quale azione abbia direttamente o indirettamente esercitato il **Cremona** sul progresso della Matematica e specialmente della Geometria nell'ultimo quarantennio, e costituirà il migliore monumento alla cara e venerata Sua memoria.

GIUSEPPE JUNG.

Milano, 1.° agosto 1903.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI.

In seguito a difficoltà d'ordine materiale è stato deciso che a partire dal Vol. VI della Serie III degli *Annali di Matematica* il prezzo degli *Estratti* (oltre le copie *quaranta* che mettiamo gratuitamente a disposizione dei Signori Autori presso l'editore), e fino alla concorrenza di *cento esemplari*, sarà regolato dalla tariffa seguente.

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI "ANNALI DI MATEMATICA"

(compresa la copertina **non** stampata, spese postali a parte).

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie			
	25	50	75	100
Pagine 4	Lire 3 —	Lire 3 50	Lire 4 —	Lire 4 50
" 8	" 3 50	" 4 —	" 4 50	" 5 —
" 12	" 6 50	" 7 50	" 8 50	" 9 50
" 16	" 7 —	" 8 —	" 9 —	" 10 —
" 20	" 10 —	" 11 50	" 13 —	" 14 50
" 24	" 10 50	" 12 —	" 13 50	" 15 —
" 28	" 13 50	" 15 50	" 17 —	" 19 50
" 32	" 14 —	" 16 —	" 18 —	" 20 —

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo.

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno, ciascuno di 10 a 12 fogli in 4.°

L'associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa lire 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o cartolina vaglia, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla Tipo-Litografia ***Rebeschini di Turati e C., via Rovello 16, Milano,*** alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

ULRICO HOEPLI in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);

CARLO CLAUSEN già ERMANNO LOESCHER in Torino (via Po, 19, Palazzo della R. Università);

Fratelli BOCCA in Torino, Roma, Firenze;

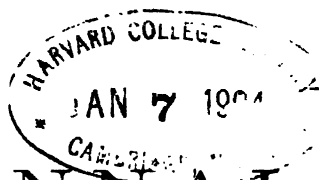
GAUTHIER-VILLARS in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);

DULAU et COMP. in Londra (37, Soho-Square);

R. FRIEDLÄNDER et SOHN in Berlino (Carlstrasse, 11).

Di ogni pubblicazione inviata direttamente da Autori o Editori alla Direzione degli *Annali* verrà dato l'annunzio in due successivi fascicoli.

È in corso di stampa il fascicolo 2.° del tomo IX.°



ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*
Corrado Segre *in Torino*

SERIE III.ª

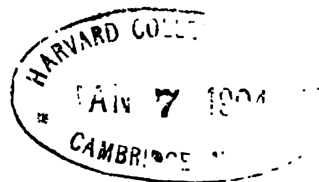
TOMO IX.° — FASCICOLO 2.°

(Ottobre 1903.)

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

Su una classe di equazioni a radici reali.



(*Di* ONORATO NICCOLETTI, *a Pisa.*)

L'equazione cubica per la ricerca degli assi di una superficie del 2.° ordine ha, come è noto, tutte le radici reali. Una delle più semplici dimostrazioni di questo teorema è fondata sull'ortogonalità di due direzioni principali, corrispondenti a radici diverse dell'equazione stessa. Questa proprietà, convenientemente estesa, vale in altri casi e conduce ad una classe di equazioni e di sistemi di equazioni, a radici reali, di cui l'equazione ricordata è caso particolarissimo. Queste equazioni sono note soltanto in parte, ed anche per queste note, dalla proprietà ricordata insieme con alcuni semplici teoremi della teoria dei determinanti, seguono in guisa affatto elementare e puramente algebrica le loro principali proprietà.

Allo studio di tali equazioni, secondo il metodo ora accennato, è dedicato il presente lavoro: gli enunciati dei teoremi relativi furono già comunicati alla R. Accademia dei Lincei nell'agosto del presente anno, in una Nota dallo stesso titolo del presente lavoro.

I.

1. Una forma bilineare in $2n$ variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, $y_1 y_2 \dots y_n$

$$A = \sum_{1}^{n}{}_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu \tag{1}$$

si dice di *Hermite* e di $\left\{ \begin{array}{l} \textit{prima} \\ \textit{seconda} \end{array} \right.$ *specie* quando per tutti i valori degli in-

dici μ e ν, i coefficienti $a_{\mu\nu}$, $\pm a_{\nu\mu}$ son numeri complessi coniugati, quando cioè (indicando con $\bar{\alpha}$ il numero complesso coniugato di α) si ha, per tutti i valori degli indici μ e ν:

$$\bar{a}_{\mu\nu} = \pm a_{\nu\mu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Una forma di Hermite di prima specie si muta in una di seconda, e inversamente, quando si moltiplichi per un immaginario puro: se alle variabili x_μ, y_μ si danno valori complessi coniugati assume un valore reale o puramente immaginario, secondochè essa è di prima o di seconda specie. La forma stessa (a meno del moltiplicatore i, ove sia di seconda specie) diventa allora una particolare forma quadratica a coefficienti reali in $2n$ variabili reali. E per le forme di Hermite valgono appunto teoremi e proprietà affatto simili a quelli delle forme quadratiche reali. Ricordiamone i più importanti:

a) Una forma di Hermite di prima specie (di quelle di seconda è evidentemente inutile dire) dicesi *riduttibile* od *irriduttibile*, secondochè è o no possibile, mediante una sostituzione lineare omogenea sulle $x_1 \ldots x_n$, e la complessa coniugata sulle $y_1 \ldots y_n$, trasformarla in un'altra forma ancora di Hermite e di prima specie con un numero minore di variabili. Perchè una forma di Hermite sia riducibile è necessario e sufficiente che il suo *discriminante:*

$$|a_{ik}| = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \tag{3}$$

sia nullo; e, dettane r la caratteristica, la forma stessa può ridursi ad una forma di Hermite in $2r$ variabili, irriducibile in queste variabili (*).

b) Una forma di Hermite di prima specie si dice *definita*, quando essa non si annulla *mai* per valori complessi coniugati, *non tutti nulli*, delle variabili x_μ, y_μ; per questi valori essa assume tutti valori reali di uno stesso segno; e secondochè questo segno è positivo o negativo, la forma stessa si dice *positiva* o *negativa;* una forma di Hermite è invece *indefinita*, quando, per valori complessi coniugati delle variabili, essa può assumere anche valori di segno contrario; dicesi infine *semidefinita* quando essa può annullarsi per valori complessi coniugati (non tutti nulli) delle variabili, ma i suoi valori

(*) Cf. Ricci, *Algebra*, pag. 131 e seg. — Christoffel, *Giornale di Crelle*. Vol. 63; pag. 255; Loewy, *ibid.* Vol. 120, pag. 53-72.

reali, non nulli, hanno tutti il medesimo segno, positivo o negativo, secondochè la forma è *positiva* o *negativa* (*).

2. *a*) Diremo che una forma di HERMITE di prima specie è *parzialmente definita rispetto alle variabili* $x_1 x_2 \dots x_m$ (ed alle coniugate) *quando il suo annullarsi* (per valori complessi coniugati delle variabili x_μ, y_μ) *porti di necessità l'annullarsi delle variabili* $x_1, x_2, \dots, x_m$.

È subito visto che una forma definita lo è anche parzialmente rispetto a qualsiasi gruppo delle variabili $x_1 x_2 \dots x_m$; una indefinita non può esserlo rispetto a nessuna tra esse; basterà dunque considerare il caso di una forma semidefinita.

Il suo discriminante $|a_{ik}|$ è allora uguale allo zero; e, dettane r la caratteristica, è possibile con una trasformazione lineare sulle x (e la coniugata sulle y):

$$x_\mu = \sum_1^n {}_\rho \, c_{\mu\rho} \, x'_\rho \tag{4}$$

trasformarla in una forma B, irriducibile e definita in r variabili $x'_1, x'_2, \dots x'_r$ (e nelle $y'_1, y'_2, \dots y'_r$); è perciò necessario e sufficiente che nella (4) i coefficienti $c_{\mu\rho}$, pei quali è $\rho > r$, soddisfino alle n equazioni lineari:

$$\sum_1^n {}_\mu \, a_{\mu\nu} \, c_{\mu\rho} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots n; \; \rho = r+1, \dots n) \tag{5}$$

e (dovendo essere il determinante delle c diverso da zero) costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni delle equazioni stesse: gli altri coefficienti $c_{\mu\rho}$, per $\rho \leq r$, sono invece affatto arbitrari, colla sola condizione che il modulo $|c_{\mu\nu}|$ della trasformazione lineare sia diverso da zero (**). L'annullarsi della forma A, e quindi della equivalente B, porta allora che sian nulle le $x'_1, x'_2, \dots x'_r$; cioè, per le (4), perchè la A si annulli, è necessario e sufficiente si abbia:

$$x_\mu = \sum_{r+1}^n {}_\rho \, c_{\mu\rho} \, x'_\rho \, ; \tag{6}$$

ed in queste relazioni le x'_ρ ($\rho = r+1, \dots n$) possono riguardarsi come $n-r$ parametri arbitrari. Perchè dunque la A sia parzialmente definita rispetto

(*) Daremo più oltre i criterî per riconoscere se una forma di HERMITE di prima specie è definita, indefinita o semidefinita.

(**) Cf. RICCI, *Algebra*, pag. 131 e seg.

alle $x_1, x_2, \dots x_m$, dalle (6) deve seguire *sempre* $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$; cioè nella sostituzione (5) deve essere:

$$c_{1\rho} = c_{2\rho} = \cdots = c_{m\rho} = 0 \qquad (\rho = r+1,\ r+2 \dots n).$$

Le equazioni (5) sono adunque tali che per *qualunque* loro soluzione $c_1, c_2, \dots c_n$, si ha $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$; e quindi la matrice che si ottiene dal discriminante (3) sopprimendovi le prime r righe, deve aver la caratteristica $r - m$ (*). E poichè il ragionamento si può invertire, ne segue:

Perchè una forma di HERMITE *di prima specie:*

$$A = \Sigma\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_k$$

sia definita parzialmente rispetto alle $x_1, x_2, \dots x_m$, è necessario e sufficiente che essa sia non indefinita e che la caratteristica del suo discriminante diminuisca di m unità sopprimendovi le prime m righe (o colonne).

b) Siano $A = \Sigma_{ik}\, a_{ik}\, x_i\, y_k$, $B = \Sigma_{ik}\, b_{ik}\, x_i\, y_k$ due forme di HERMITE (di 1.ª specie) riducibili (**); ed i loro discriminanti abbian le caratteristiche r ed s, e sia ad es.: $r \geqq s$.

(*) Si osservi infatti il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè in ogni soluzione $(x_1\, x_2 \dots x_n)$ del sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite:

$$U_i\,(x) = \sum_{1}^{n}{}_k\, a_{ik}\, x_k = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \dots\ m) \qquad (\alpha)$$

si abbia $x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0$, è che la caratteristica della matrice del sistema diminuisca di l unità, sopprimendovi le prime l colonne.

Perchè infatti in ogni soluzione delle (α) si abbia $x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0$, è necessario e sufficiente che le equazioni:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots\ x_l = 0 \qquad (\beta)$$

siano una conseguenza delle (α), e quindi che, aggiungendo alla matrice delle (α) le l righe dei coefficienti delle (β), la sua caratteristica rimanga immutata. Ma nelle ultime l righe della nuova matrice vi è un minore di ordine l (ed uno solo) diverso da zero, quello formato dalle prime l colonne; quindi la matrice

$$\|\, a_{\mu\nu} \,\|. \qquad (\mu = 1,\ 2, \dots\ m,\ \nu = l+1, \dots\ n) \qquad (\gamma)$$

che si ottiene, *sopprimendo* dalla matrice delle (α) le prime l colonne, deve avere una caratteristica non superiore ad $r - l$, e, poichè d'altra parte la matrice delle (α) ha la caratteristica r, uguale ad $r - l$. Inversamente, se questo accade, sia la matrice delle (α), sia quella delle (α) e (β) insieme han la caratteristica r, donde segue la verità della nostra asserzione.

(**) Ove le due forme non siano ambedue riducibili, la questione non ha luogo a farsi.

Proponiamoci di vedere quando sarà possibile con *una stessa sostituzione lineare* trasformarle simultaneamente in due altre forme in r variabili soltanto. *È perciò necessario e sufficiente che la matrice di n righe e $2n$ colonne che si ha riunendo i due discriminanti $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ abbia ancora la caratteristica r.* Che sia necessario, si vede immediatamente supponendo le due forme già ridotte a contenere soltanto r variabili ed osservando che la caratteristica della relativa matrice non cambia per sostituzioni lineari (non degeneri) sulle variabili; per dimostrare che è sufficiente, osserviamo che quando questo accada, le n equazioni lineari omogenee nelle $c_{\mu\rho}$

$$\sum_1^n {}_\mu\, b_{\mu\nu}\, c_{\mu\rho} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n;\ \rho = r+1, \ldots n) \tag{7}$$

sono una conseguenza delle (5), e quindi il sistema delle (5) e (7) ammette ancora $n - r$ soluzioni fondamentali.

3. Insieme colla forma A è utile considerare le forme *associate* (*).

Nel discriminante della A sia $a_{i_1\ldots i_\rho, k_1\ldots k_\rho}$ il minore di ordine ρ formato colle righe $i_1, i_2, \ldots i_\rho$, colle colonne $k_1 \ldots k_\rho$ (con $i_1 < i_2 < \cdots < i_\rho$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_\rho$). Indichiamo ancora con $x_{i_1 i_2 \ldots i_\rho}, y_{k_1 \ldots k_\rho}$ due serie di $\binom{n}{\rho}$ variabili, corrispondenti alle $\binom{n}{\rho}$ combinazioni della classe ρ dei numeri $1, 2, \ldots n$. La forma bilineare:

$$A^{(\rho)} = \sum_{\substack{(i_1\ldots i_\rho)\\(k_1\ldots k_\rho)}}^{(n)} a_{i_1\ldots i_\rho; k_1 \ldots k_\rho}\, x_{i_1\ldots i_\rho}\, y_{k_1\ldots k_\rho} \tag{8}$$

(dove la somma è estesa a tutte le coppie di combinazioni, uguali o distinte, della classe ρ dei numeri $1, 2, \ldots n$) si dirà *associata della A di rango ρ*; essa è covariante alla A, quando, operando sulle x (o sulle y) una qualunque sostituzione lineare, sulle $x_{i_1\ldots i_\rho}$ ($y_{k_1\ldots k_\rho}$) si eseguisca la sostituzione lineare associata (*).

Relazioni molto semplici legano la forma A alle sue associate.

a) La forma A si dice di *classe r*, quando il suo discriminante abbia la caratteristica r; tutte le associate $A^{(\rho)}$, per le quali è $\rho > r$, sono allora identicamente nulle; le altre $A^{(\rho)}$, per cui $\rho \leq r$, hanno la classe $\binom{r}{\rho}$. In

(*) Cf. NICCOLETTI, *Sulle matrici associate ad una matrice data.* (Atti dell'Accademia di Torino, 15-6-1902.)

particolare la $A^{(r)}$ ha la classe *uno*; è quindi decomponibile nel prodotto di due forme lineari, l'una sulle $x_{i_1 \ldots i_r}$, l'altra sulle $y_{k_1 \ldots k_r}$.

b) Mediante sostituzioni lineari sulle variabili è possibile, ed in infiniti modi, ridurre la forma A alla forma normale

$$A = \sum_{1}^{r}{}_i \alpha_i X_i Y_i ; \tag{1*}$$

le associate $A^{(\rho)}$ si riducono, per le sostituzioni associate, alla forma normale:

$$A^{(\rho)} = \sum_{(i_1 \ldots i_\rho)}^{(r)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_\rho} X_{i_1 \ldots i_\rho} Y_{i_1 \ldots i_\rho} , \tag{8*}$$

essendo la somma estesa alle continuazioni $(i_1 \ldots i_\rho)$ della classe ρ dei numeri $1, 2, \ldots r$.

c) Se la A è una forma di Hermite di prima (seconda) specie, tutte le associate $A^{(\rho)}$ sono anche esse forme di Hermite (di prima specie per ρ pari, di seconda per ρ dispari); se la forma A di prima specie è inoltre definita, tali sono anche tutte le associate, e tutte positive quando la A sia definita positiva; quando invece la A sia definita negativa, le $A^{(\rho)}$ sono positive per ρ pari, negative per ρ dispari, ecc. (*).

II.

4. Siano ora:

$$A(x\,y) = \Sigma_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu , \quad B(x\,y) = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

due forme bilineari sulle variabili $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$; e si consideri l'equazione in ω:

$$D(\omega) = | a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}\, \omega | = 0 , \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

che si ottiene annullando il discriminante della forma generica A del *fascio* determinato dalle due forme A e B (**). I coefficienti di questa equazione sono gli invarianti simultanei delle due forme; le sue radici sono quindi in-

(*) Tutte queste proprietà si verificano subito nelle forme normali della (1*), (8*) della A e delle associate.

(**) Naturalmente supponiamo che il determinante $D(\omega)$ non sia identicamente nullo.

varianti *assoluti* e perciò rimangono inalterate per sostituzioni lineari arbitrarie sulle x e sulle y. Detta inoltre ω_r una qualunque radice della (2), essa rende il determinante $D(\omega)$ di caratteristica minore di n; se quindi si considera il sistema di equazioni lineari omogenee:

$$(X_r) \qquad \sum_1^n {}_\mu (a_{\mu\nu} - \omega_r b_{\mu\nu}) x_\mu^{(r)} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \dots n) \tag{3}$$

si potrà soddisfare ad esso con n quantità $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots x_n^{(r)}$, *non tutte uguali allo zero.*

Affatto analogamente, se ancora ω_s è una radice della (2), al sistema di n equazioni lineari omogenee:

$$(Y_s) \qquad \sum_1^n {}_\nu (a_{\mu\nu} - \omega_s b_{\mu\nu}) y_\nu^{(s)} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \dots n) \tag{4}$$

si può soddisfare con n quantità $y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \dots y_n^{(s)}$, pure non tutte nulle.

Le equazioni (3) e (4) possono scriversi anche:

$$\sum_1^n {}_\mu a_{\mu\nu} x_\mu^{(r)} = \omega_r \sum_1^n {}_\mu b_{\mu\nu} x_\mu^{(r)},$$

$$\sum_1^n {}_\nu a_{\mu\nu} y_\nu^{(s)} = \omega_s \sum_1^n {}_\nu b_{\mu\nu} y_\nu^{(s)};$$

moltiplichiamo allora la prima per $y_\nu^{(s)}$ e sommiamo rispetto a ν da 1 ad n, moltiplichiamo la seconda per $x_\mu^{(r)}$ e sommiamo rispetto a μ da 1 ad n; sottraendo i risultati, otteniamo:

$$(\omega_r - \omega_s) \sum_1^n {}_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu^{(r)} y_\nu^{(s)} = 0.$$

Se dunque ω_r, ω_s *sono due radici* diverse *della equazione* (2), *si ha la relazione fondamentale:*

$$B(x^{(r)}, y^{(s)}) = \sum_1^n {}_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu^{(r)} y_\nu^{(s)} = 0. \tag{5}$$

5. Siano le A e B due forme di Hermite di prima specie (ove fossero tutte due di seconda specie, basterà moltiplicarle per i, il che non altera l'equazione (2)); l'equazione (2) ha allora i coefficienti reali; supponendosi infatti ω reale e cambiando i in $-i$, nel determinante $D(\omega)$ le righe si permutano colle colonne; le radici complesse di essa equazione, ove esistano, son quindi a coppia coniugate. Siano allora, se è possibile, ω_1 ed ω_2 due tali radici complesse coniugate della (2) (sarà perciò anche $\omega_1 \neq \omega_2$);

poniamo nelle (3) e (4) rispettivamente $r=1$, $s=2$. Avremo i due sistemi:

$$\left.\begin{aligned} (X_1) \qquad & \sum_1^n{}_\mu (a_{\mu\nu} - \omega_1 b_{\mu\nu})\, x_\mu^{(1)} = 0, \\ (Y_2) \qquad & \sum_1^n{}_\nu (a_{\mu\nu} - \omega_2 b_{\mu\nu})\, y_\nu^{(2)} = 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

cambiando in queste equazioni i in $-i$, esse diventano rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned} (\bar{X}_1) \qquad & \sum_1^n{}_\nu (a_{\mu\nu} - \omega_2 b_{\mu\nu})\, \bar{x}_\nu^{(1)} = 0, \\ (\bar{Y}_2) \qquad & \sum_1^n{}_\mu (a_{\mu\nu} - \omega_1 b_{\mu\nu})\, \bar{y}_\mu^{(2)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{$\bar{6}$}$$

Le relazioni (6) e $(\bar{6})$ dimostrano che, indicando con $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ due *qualunque* sistemi di soluzioni delle equazioni (3) e (4) (fattori $r=s=1$), si *può* soddisfare alle equazioni analoghe, per $r=s=2$, prendendo $x_\nu^{(2)}$, $y_\nu^{(2)}$ rispettivamente *complesse coniugate* di $y_\nu^{(1)}$, $x_\nu^{(1)}$. La relazione fondamentale (5), fattovi allora $r=1$, $s=2$ diventa:

$$B(x^{(1)}, x^{(1)}) = \sum_1^n{}_{\mu\nu} b_{\mu\nu}\, x_\mu^{(1)}\, \bar{x}_\nu^{(1)} = 0. \tag{7}$$

Supponiamo ora che la B contenga le sole variabili $x_1 x_2 \ldots x_m$ (e le coniugate) e sia *definita* in queste variabili. La (7) dimostra allora che deve essere:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \cdots = x_m^{(1)} = 0$$

per *qualunque* soluzione delle equazioni (X_1). Ne segue (*) che, ove la radice complessa ω_1 renda il determinante $D(\omega)$ di caratteristica $r<n$, essa deve render di caratteristica $r-m$ la matrice formata dalle ultime $n-m$ righe (o colonne) del determinante stesso. Ora questo è impossibile nelle nostre ipotesi; la matrice delle ultime $n-m$ righe di $D(\omega)$ è infatti indipendente da ω e, poichè il determinante stesso non è identicamente nullo, ha la caratteristica $n-m$; nelle ipotesi fatte non può dunque l'equazione (2) avere radici complesse. D'altra parte, se la forma B non è indefinita, essa può sempre ridursi con una sostituzione lineare ad una forma di Hermite definita nelle variabili che essa contiene, nè per una tale trasformazione cambian le radici della equazione (2). Ne segue il teorema fondamentale:

(*) Cf. la nota (*) a pag. 4.

I. *Se A e B sono due forme di* Hermite *di prima specie, di cui una, ad es.: la B non sia indefinita (nè identicamente nulla), l'equazione (non identica) in* ω:

$$|a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

ha tutte le radici reali (*).

6. Nelle stesse ipotesi si ha ancora il teorema:

II. *Una radice della equazione* (2), *multipla di ordine* ρ, *rende il determinante del primo membro di caratteristica* $n - \rho$ *ed inversamente.*

Possiamo evidentemente supporre anche qui che la B dipenda soltanto dalle variabili $x_1 \ldots x_m$ (e dalle coniugate) e sia definita rispetto a queste; una sostituzione lineare, non degenere, sulle variabili non muta infatti la caratteristica del determinante $D(\omega)$. Indichiamo allora con $d_{i_1 \ldots i_s; k_1 \ldots k_s}$ il minore di $D(\omega)$ formato colle righe $i_1 \ldots i_s$, colle colonne $k_1 \ldots k_s$; con $D_{i_1 \ldots i_s; k_1 \ldots k_s}$ l'aggiunto. Avremo:

$$\frac{d^s D(\omega)}{d\omega^s} = (-1)^s \sum_{(i_1 \ldots i_s; k_1 \ldots k_s)}^{(1,2 \ldots m)} b_{i_1 \ldots i_s; k_1 \ldots k_s} D_{i_1 \ldots i_s; k_1 \ldots k_s}(\omega), \tag{8}$$

(dove il simbolo $\sum_{(i_1 \ldots i_s; k_1 \ldots k_s)}^{(1 \ldots m)}$ sta ad indicare che la somma è estesa a tutte le combinazioni $(i_1 \ldots i_s)$ $(k_1 \ldots k_s)$ della classe s dei numeri $1, 2, \ldots m$) e di qui segue manifestamente che, ove ω renda il determinante $D(\omega)$ di caratteristica $n - \rho$, essa è radice multipla della (2) di un ordine uguale o maggiore di ρ, e per contrario, che una radice multipla di ordine ρ della (2) non può rendere il primo membro di una caratteristica minore di $n - \rho$. Per dimostrare che la caratteristica di $D(\omega)$ è proprio uguale ad $n - \rho$ osserviamo che il teorema è vero per $\rho = 1$; una radice *semplice* della (2) annulla infatti $D(\omega)$ e quindi, per ciò che precede, lo rende di caratteristica $n - 1$; potremo perciò procedere per induzione ed ammesso il teorema per le radici multiple fino all'ordine ρ, lo dimostreremo per le radici multiple dell'ordine $\rho + 1$. Sia dunque ω una tale radice; poichè essa è anche radice multipla dell'ordine ρ, la caratteristica del determinante (2) sarà uguale o minore di $n - \rho$; quindi, se consideriamo la forma bilineare *associata di*

(*) Cf. Gundelfinder, *Analytische Geometrie des Raumes von* Otto Hesse. — III[te] Auflage, 1876, Supp. IV-S. 515).

rango $n - \rho$ della forma $A - \omega B$, cioè la forma bilineare nelle $\binom{2n}{\rho}$ variabili $X_{i_1 \dots i_\rho}$, $Y_{k_1 \dots k_\rho}$:

$$(A - \omega B)^{(n-\rho)} = \sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)}^{(1 \dots n)} D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) X_{i_1 \dots i_\rho} \cdot Y_{k_1 \dots k_\rho},$$

questa, ove non sia identicamente nulla, si decompone (n.° 3, *a*) nel prodotto di due forme lineari; si ha cioè:

$$(A - \omega B)^{(n-\rho)} = \left(\sum_{(i_1 \dots i_\rho)}^{(n)} p_{i_1 i_2 \dots i_\rho} X_{i_1 \dots i_\rho} \right) \left(\sum_{(k_1 \dots k_\rho)}^{(n)} q_{k_1 \dots k_\rho} Y_{k_1 \dots k_\rho} \right);$$

e quindi:

$$D_{i_1 \dots i_\rho, k_1 \dots k_\rho}(\omega) = p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot q_{k_1 \dots k_\rho}. \tag{9}$$

Osserviamo ora che due minori coniugati del determinante $D(\omega)$

$$D_{i_1 \dots i_\rho, k_1 \dots k_\rho}(\omega), \qquad D_{k_1 \dots k_\rho; i_1 \dots i_\rho}(\omega)$$

hanno, per ω reale, valori complessi coniugati; le due forme lineari superiori sono quindi, a meno del segno, complesse coniugate (*); si ha cioè:

$$q_{i_1 \dots i_\rho} = \pm \bar{p}_{i_1 \dots i_\rho}$$

ed anche

$$D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) = \pm p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot \bar{p}_{k_1 \dots k_\rho}. \tag{10}$$

Si ricordi ora che ω è radice multipla della (2) di ordine $\rho + 1$; fatto quindi nella (8) $s = \rho$, si avrà:

$$\frac{d^\rho D(\omega)}{d \omega^\rho} = (-1)^\rho \sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)}^{(1 \dots m)} b_{i_1 \dots i_\rho, k_1 \dots k_\rho} D_{i_1 \dots i_\rho, k_1 \dots k_\rho}(\omega) = 0,$$

essendo la somma $\Sigma^{(1 \dots m)}$ estesa alle combinazioni $i_1 \dots i_\rho$, $k_1 \dots k_\rho$ dei numeri $1, 2, \dots m$. Ne segue per le (10):

$$\sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)}^{(1 \dots m)} b_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho} p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot \bar{p}_{k_1 \dots k_\rho} = B^{(\rho)}(p, \bar{p}) = 0;$$

e, poichè la $B^{(\rho)}$ è *definita*, se ne deduce:

$$p_{i_1 \dots i_\rho} = 0 \tag{11}$$

per tutte le combinazioni $i_1 \dots i_\rho$ *della classe* ρ *dei numeri* $1, 2, \dots m$. So-

(*) Cf. Clebsch, *Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reellen Wurzeln besitzen.* (Crelle, vol. 62, pag. 232 e ss.)

stituendo nelle (10), si ha che son nulli tutti i minori $D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega)$ di ordine $n-\rho$ del determinante (2) che contengono un qualsiasi minore di ordine $n-m$ dedotto dalla matrice delle ultime $n-m$ righe (o colonne) di $D(\omega)$; e poichè questa matrice non è nulla, ne segue (per un noto teorema di KRONECKER) (*) che la caratteristica di $D(\omega)$ non può superare $n-\rho-1$, e quindi, se ω è radice multipla dell'ordine $\rho+1$ soltanto, è uguale ad $n-\rho-1$, c. d. d.

7. Abbiamo già osservato che due minori coniugati del determinante (2) hanno, per ω reale, valori complessi coniugati; *il loro prodotto, che è reale, non può dunque esser mai negativo;* un qualunque minore principale $D_{i_1 \dots i_k; i_1 \dots i_k}(\omega)$, o come anche scriveremo più brevemente, $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$, è poi reale per ω reale. Consideriamo allora l'identità (che esprime una nota proprietà della teoria dei determinanti) (**):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)\,\Delta_{i_1 \dots i_k\, i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) = \\ &= \Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega)\,\Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+2}}(\omega) - D_{i_1 \dots i_k i_{k+1}; i_1 \dots i_k i_{k+2}}(\omega)\,.\,D_{i_1 \dots i_k i_{k+2}; i_1 \dots i_k, i_{k+1}}(\omega), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

nella quale $i_1 \dots i_{k+2}$ sono indici diversi da 1 ad n; ne segue evidentemente (posto $\rho = n-k$):

Se un valore reale di ω annulla un minore principale di ordine ρ del determinante (2), *due qualunque minori principali di ordine $\rho-1$ in esso contenuti, che non siano nulli per quel valore di ω* (***), *hanno valori* (*reali e*) *del medesimo segno.*

Se inoltre un valore reale di ω annulla ad es.: $\Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega)$, i due minori $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$, $\Delta_{i_1 \dots i_k, i_{k+1} i_{k+2}}(\omega)$, se per quel valore di ω sono ambedue diversi da zero, hanno valori di segno contrario. Indichiamo allora con $i_1, i_2, \dots i_n$ una determinata permutazione dei numeri $1, 2, \dots n$ e consideriamo la successione di $n+1$ funzioni

$$D(\omega),\ \Delta_{i_1}(\omega),\ \Delta_{i_1 i_2}(\omega), \dots\ \Delta_{i_1 \dots i_n}(\omega) = 1\,; \quad (13)$$

(*) Cf. KRONECKER, *Bemerkungen zur Determinantentheorie* (Gesammelte Werke, Bd. I, s. 236).

(**) Cfr. ad es.: CESARO, *Analisi algebrica*, pag. 28.

(***) Questo accadrà in generale; se infatti un valore (reale) di ω annulla un minore principale di ordine $n-k$ $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$ e tutti i minori *principali* di ordine $n-k-1$ in esso contenuti, si annullano anche, per quel valore di ω, *tutti* i minori di ordine $n-k-1$ di $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$; ω è quindi radice *doppia* della equazione $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega) = 0$ (cf. n.° 8, *a*).

i suoi termini sono funzioni razionali intere in ω, ed, ove alcune tra esse non siano identicamente nulle, nè due consecutive si annullino per uno stesso valore reale di ω, quando un valore reale di ω annulla alcuna tra esse, quelle che la comprendono hanno, per ciò che precede, valori di segno contrario. Questa proprietà delle funzioni (13) le ricollega al teorema di STURM sulle radici reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali; ed è facile infatti dedurre dalle (13) *una successione di* STURM per la equazione (2). Se invero ω è una radice semplice (e reale) della (2), si ha, colle notazioni del numero precedente:

$$\Delta_{i_1}(\omega) = \pm\, p_{i_1} \cdot \bar{p}_{i_1}, \quad \text{ed insieme} \quad D'(\omega) = \mp\, B(p, \bar{p});$$

e quindi $D'(\omega)$ e $\Delta_{i_1}(\omega)$ hanno ugual segno o segno contrario, secondochè la B è negativa o positiva (*). Indichiamo allora con η l'unità negativa o positiva, secondochè B è positiva o negativa, e poniamo:

$$\Delta'_{i_1 \ldots i_k}(\omega) = \eta^k \cdot \Delta_{i_1 \ldots i_k}(\omega); \tag{14}$$

possiamo allora enunciare il teorema:

III. *Se tra le* $n+1$ *funzioni:*

$$D(\omega),\ \Delta'_{i_1}(\omega),\ \Delta'_{i_1 i_2}(\omega), \ldots,\ \Delta'_{i_1 \ldots i_n}(\omega) \tag{15}$$

non ve ne sono delle identicamente nulle, la successione (15) *è una successione di* STURM *per la equazione* (2); *quindi il numero delle radici reali della equazione stessa comprese in un intervallo* ($\alpha\,\beta$) (*ciascuna contata col suo ordine di moltiplicità*) (**) *è uguale al numero delle variazioni che la successione stessa perde nell'intervallo* ($\alpha\,\beta$).

8. *a*) Consideriamo un minore principale $\Delta_{i_1 \ldots i_k}(\omega)$ del determinante $D(\omega)$. Esso può pensarsi come il discriminante della forma bilineare in $2(n-k)$ variabili che si ottiene dalla forma generica $A - \omega B$, ponendovi uguali a zero le $x_{i_1}, x_{i_2} \ldots x_{i_k}, y_{i_1}, y_{i_2} \ldots y_{i_k}$.

La forma B si riduce in tal guisa ad una forma di HERMITE in $2(n-k)$ variabili, che come la B è non indefinita ed ha di più il medesimo segno. Se quindi il minore che si considera non è identicamente nullo, nè indipendente da ω, *l'equazione:*

$$\Delta_{i_1 \ldots i_k}(\omega) = 0$$

ha tutte le radici reali.

(*) Cf. anche n.° 8, *b*).

(**) Cf.: WEBER, *Algebra*. Bd. I, p. 276 (I. Auf.).

b) Sia ora ω una radice della (2) multipla di ordine ρ; per il teorema II essa sarà multipla di ordine $\rho - 1$ per un qualunque minore principale di ordine $n - 1$, $\Delta_\lambda(\omega)$.

Indicando quindi con h un numero reale sufficientemente piccolo in valore assoluto, si avrà:

$$D(\omega + h) = \frac{h^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho D(\omega)}{d\omega^\rho} + \frac{h^{\rho+1}}{(\rho+1)!} \frac{d^{\rho+1} D(\omega)}{d\omega^{\rho+1}} + \cdots;$$

ma colle notazioni del n.° 6 è:

$$\frac{d^\rho D(\omega)}{d\omega^\rho} = (-1)^\rho \sum_{i_1 \ldots i_\rho; k_1 \ldots k_\rho} b_{i_1 \ldots i_\rho; k_1 \ldots k_\rho} D_{i_1 \ldots i_\rho; k_1 \ldots k_\rho}(\omega) = \pm (-1)^\rho B^{(\rho)}(p, \bar{p})$$

e quindi anche:

$$D(\omega + h) = (-1)^\rho \frac{h^\rho}{\rho!} B^{(\rho)}(p, \bar{p}) + \frac{h^{\rho+1}}{(\rho+1)!} \frac{d^{\rho+1} D(\omega)}{d\omega^{\rho+1}} + \cdots$$

e *sarà* $B^{(\rho)}(p, \bar{p})$ *diverso da zero.*

Affatto analogamente, con notazioni evidenti, si avrà:

$$\Delta_\lambda(\omega + h) = \pm (-1)^{\rho-1} \frac{h^{\rho-1}}{(\rho-1)!} B_\lambda^{(\rho-1)}(p, \bar{p}) + \frac{h^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho \Delta_\lambda(\omega)}{d\omega^\rho} + \cdots;$$

e quindi, *nell'intorno di* $h = 0$, sarà:

$$\frac{D(\omega + h)}{\Delta_\lambda(\omega + h)} = -\frac{h}{\rho} \frac{B^{(\rho)}(p, \bar{p})}{B_\lambda^{(\rho-1)}(p, \bar{p})} + \cdots \tag{16}$$

e nelle ipotesi fatte, il coefficiente di h è finito e diverso da zero. Si ricordi ora che insieme colla B, anche la $B^{(\rho)}$ e la $B_\lambda^{(\rho-1)}$ sono non indefinite, e detto η il segno della B, il loro segno è rispettivamente η^ρ, $\eta^{\rho-1}$. Ne segue allora:

Se ω è una radice della (2) *ed h è un numero reale, sufficientemente piccolo in valore assoluto, il rapporto* $\frac{D(\omega + h)}{\Delta_\lambda(\omega + h)}$ *ha il segno di h o il segno contrario secondochè la B è negativa o positiva; per $h = 0$, lo stesso rapporto è nullo.*

Ciò posto, un ragionamento affatto analogo a quello che si trova in una dimostrazione del teorema di Rolle dimostra che *tra due radici consecutive della equazione* (2) *vi è un numero dispari di radici reali della* $\Delta_\lambda = 0$. Questo risultato si può ancora più precisare, osservando che la relazione tra

il determinante $D(\omega)$ ed un suo qualunque minore principale si può, in un determinato senso, *invertire* (cf. n.° 13_r b); ne segue che anche tra due radici reali consecutive della equazione $\Delta_\lambda(\omega) = 0$ deve cadere un numero dispari di radici reali della $D(\omega) = 0$; e quindi di necessità *le radici reali delle due equazioni* $D(\omega) = 0$, $\Delta_\lambda(\omega) = 0$ *si separano a vicenda.* Un risultato del tutto analogo vale evidentemente per un qualunque minore principale del determinante $D(\omega)$ ed un minore principale dell'ordine immediatamente inferiore in quello contenuto. Possiamo quindi enunciare il teorema:

IV. *Qualunque minore principale del determinante* $D(\omega)$, *uguagliato a zero, ha tutte radici reali; se due minori principali son tali che i loro ordini differiscano di una unità ed uno sia contenuto nell'altro, le loro radici reali si separano a vicenda.*

III.

9. Ci sia permessa ora una breve digressione.

Se nella equazione (2) poniamo $\omega = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$ e ne moltiplichiamo il primo membro per ω_1^n, essa si scrive in forma omogenea:

$$D(\omega_1, \omega_2) = |a\,\omega_1 + b\,\omega_2| = 0, \tag{2*}$$

ed anche per disteso:

$$\left.\begin{aligned} D(\omega_1, \omega_2) = (A)\,\omega_1^n + (A\,B)_1\,\omega_1^{n-1}\,\omega_2 + \cdots + (A\,B)_r\,\omega_1^{n-r}\,\omega_2^r + \cdots + \\ + (A\,B)_{n-1}\,\omega_1\,\omega_2^{n-1} + (B)\,\omega_2^n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

essendo

$$\left.\begin{aligned} (A\,B)_r = (B\,A)_{n-r} = \sum_{(\alpha_1\ldots\alpha_r;\beta_1\ldots\beta_r)}^{(1\ldots n)} b_{\alpha_1\cdots\alpha_r;\beta_1\cdots\beta_r}\,A_{\alpha_1\cdots\alpha_r;\beta_1\cdots\beta_r} \\ (r = 0,\,1,\,2\ldots\,n-1)\quad (A\,B)_0 = (B\,A)_n = (A) = |a_{ik}| \\ (A\,B)_n = (B\,A)_0 = |b_{ik}| = (B) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

gli invarianti simultanei delle due forme A e B.

I teoremi I e II dei n.^{i} 5 e 6 possono allora evidentemente riunirsi nel teorema seguente:

V. *I divisori elementari del determinante* $D(\omega_1\, \omega_2)$, *diversi da* ω_1, *sono reali e lineari* (*).

Enunciato il risultato sotto questa forma, è naturale il proporsi lo studio dei divisori elementari del determinante $D(\omega_1, \omega_2)$, corrispondenti ad un suo eventuale fattore ω_1, semplice o multiplo.

Dalla (2) segue intanto che, affinchè il determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ ammetta come fattore una potenza di ω_1, con esponente non nullo, è necessario e sufficiente che sia $(B) = 0$.

Supponiamo dunque che (B) sia nullo, ed abbia la caratteristica $r < n$; saranno allora, insieme con (B), *identicamente* nulli gli invarianti:

$$(A\,B)_{n-1}\,,\ (A\,B)_{n-2}\,, \ldots,\ (A\,B)_{r+1}\,; \tag{3}$$

non lo sarà invece, *identicamente*, l'invariante $(A\,B)_r$. Poichè inoltre il determinante (B) ha la caratteristica r, la forma B può ridursi a contenere solo $2\,r$ variabili $x_1\, x_2 \ldots x_r$, $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_r$; e sarà in queste irriducibile e definita. Supponiamo già eseguita tale riduzione (sia cioè $b_{uv} = 0$, quando uno dei due indici u, v supera r) e si sviluppi il determinante (2*), secondo il teorema di Hesse generalizzato (**) per la matrice delle sue prime r righe e colonne; si avrà:

$$\left.\begin{aligned} D(\omega_1,\ \omega_2) = \sum_{0}^{[r,n-r]}\!{}_{\rho}\,(-1)^{\rho} \sum_{(i_1\ldots i_\rho;k_1\ldots k_\rho)}^{(r+1\ldots n)} \sum_{(\mu_1\ldots\mu_\rho;\nu_1\ldots\nu_\rho)}^{(1\ldots r)} A_{1,2\ldots r,i_1\ldots i_\rho;1,2\ldots r,k_1\ldots k_\rho} \\ a_{i_1\ldots i_\rho;\nu_1\ldots\nu_\rho}\, a_{\mu_1\ldots\mu_\rho;k_1\ldots k_\rho}\, D_{\mu_1\ldots\mu_\rho,r+1\ldots n;\nu_1\ldots\nu_\rho,r+1\ldots n}(\omega_1,\ \omega_2)\,.\,\omega_1^{n-r+\rho} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dove con $[r,\ n-r]$ abbiamo indicato il minore tra i due numeri r, $n-r$; e col simbolo $\sum\limits_{(\mu_1\ldots\mu_\rho;\nu_1\ldots\nu_\rho)}^{(1\ldots r)}$ (e coll'analogo) abbiamo indicato che la somma è estesa a tutte le coppie di combinazioni, uguali o distinte, della classe ρ dei numeri $1,\ 2 \ldots r$ (o $r+1, \ldots n$).

Sia ora $n-r-s$ *la caratteristica del minore* (*di ordine* $n-r$) $A_{1,2\ldots r;1,2\ldots r}$ di (A); nella somma superiore son nulli allora tutti i termini pei quali è $\rho < s$; quindi lo sviluppo del determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ per le potenze ascendenti di ω_1 *comincierà col termine* $\omega_1^{n-r+s}\,.\,\omega_2^{r-s}$ *o con un termine di grado superiore.*

10. Esaminiamo più da vicino il coefficiente M di $\omega_1^{n-r+s}\,.\,\omega_2^{r-s}$ e dimostriamo che, nelle ipotesi fatte, *esso è diverso da zero.* È subito visto che

---

(*) Cf. Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler.* (Lipsia, Teubner, 1899; § 1.)

(**) Cf. Niccoletti, *Alcuni teoremi sui determinanti.* (Annali di Matematica, Tom. VIII della Serie III, p. 290.)

esso può scriversi:

$$(-1)^s M = \sum_{(i_1\dots i_s;k_1\dots k_s)}^{(r+1\dots n)} \sum_{(\mu_1\dots\mu_s;\nu_1\dots\nu_s)}^{(1\dots r)} A_{1,2\dots r,i_1\dots i_s;1,2\dots r,k_1\dots k_s} \cdot B_{\mu_1\dots\mu_s;\nu_1\dots\nu_s}\, a_{i_1\dots i_s;\nu_1\dots\nu_s}\, a_{\mu_1\dots\mu_s;k_1\dots k_s}. \qquad (5)$$

Si ricordi ora che il determinante $A_{1,2\dots r;1,2\dots r}$ ha la caratteristica $n-r-s$ e che due minori coniugati del determinante (A) hanno valori complessi coniugati; ne segue, con considerazioni affatto analoghe a quelle del n.° 6, che può porsi:

$$A_{1,2\dots r,i_1\dots i_s;1,2\dots r,k_1\dots k_s} = \pm\, p_{i_1\dots i_s} \cdot \overline{p}_{k_1\dots k_s} \qquad (6)$$

(essendo le $p_{i_1\dots i_s} \binom{n-r}{s}$ opportune costanti non tutte uguali allo zero); se allora si pone

$$q_{\nu_1\dots\nu_s} = \sum_{i_1\dots i_s}^{(r+1\dots n)} a_{i_1\dots i_s;\nu_1\dots\nu_s}\, p_{i_1\dots i_s}, \qquad (7)$$

per le (6) e (7) la (5) diventa:

$$(-1)^s M = \sum_{(\mu_1\dots\mu_s;\nu_1\dots\nu_s)}^{(1,2\dots r)} B_{\mu_1\dots\mu_s;\nu_1\dots\nu_s}\, q_{\nu_1\dots\nu_s}\, \overline{q}_{\mu_1\dots\mu_s} = B^{(s)}(q, \overline{q}). \qquad (5^*)$$

È facile ora dimostrare che M è diverso da zero; poichè infatti la $B^{(s)}$ è definita, basterà dimostrare che *non tutte* le $q_{\nu_1\dots\nu_s}$ possono essere uguali allo zero, essendo $\nu_1\dots\nu_s$ una qualunque combinazione della classe s dei numeri $1, 2\dots r$.

A questo scopo, supponiamo che nelle (7) gli indici $\nu_1\dots\nu_s$ possano essere scelti non più solo tra i numeri $1, 2\dots r$, ma tra tutti i numeri $1, 2\dots n$; è facile allora vedere che qualunque $q_{\nu_1\dots\nu_s}$ in cui un indice ν_i almeno è preso tra i numeri $r+1, \dots n$, *è identicamente nulla.* In tale ipotesi infatti moltiplichiamo la (7) per una qualsiasi $\overline{p}_{k_1\dots k_s}$ *non nulla*; si avrà per la (6)

$$\overline{p}_{k_1\dots k_s}\, q_{\nu_1\dots\nu_s} = \pm \sum_{i_1\dots i_s}^{(r+1\dots n)} a_{i_1\dots i_s,\nu_1\dots\nu_s}\, A_{1,2\dots r,i_1\dots i_s;1,2\dots r;k_1\dots k_s}$$

ed è quindi uguale ad un determinante di ordine $n-r$, che contiene almeno $n-r-s+1$ colonne (uguali o diverse) di $A_{1,2\dots r;1,2\dots r}$; ed è quindi identicamente nullo, il che dimostra la nostra asserzione.

Se dunque M potesse annullarsi, dovrebbero essere nulle *tutte* le quantità (7), in cui $(\nu_1\dots\nu_s)$ rappresenta una combinazione qualunque della classe s degli indici $1, 2\dots n$; si avrebbero quindi $\binom{n}{s}$ equazioni lineari omogenee

nelle $\binom{n-r}{s}$ quantità $p_{i_1 \dots i_s}$. Si noti ora che la matrice del sistema così ottenuto non è che *l'associata di rango s* della matrice delle ultime $n-r$ righe di A (che ha la caratteristica $n-r$) (cf. n.° 5) ed ha quindi la caratteristica $\binom{n-r}{s}$; l'annullarsi delle $q_{\nu_1 \dots \nu_s}$ porta dunque con sè *l'annullarsi di tutte le* $p_{i_1 \dots i_s}$, il che è contro l'ipotesi che il determinante $A_{1,2 \dots r;1,2 \dots r}$ abbia una caratteristica non minore di $n-r-s$.

È dunque $M \neq 0$ e possiamo enunciare il risultato:

Il determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ *ammette il fattore* ω_1 *solo quando la forma* (B), *non indefinita, è riducibile. Se la forma stessa si suppone ridotta a contenere il* minimo *numero di variabili* $x_1, x_2 \dots x_r, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_r$ *ed* $n-r-s$ *è la caratteristica del minore* $A_{1,2 \dots r;1,2 \dots r}$ *di* (A), *sono allora nulli, oltre* (B), *tutti gli invarianti simultanei* $(AB)_\rho$ *delle due forme A e B, pei quali è* $n-1 \geqq \rho > r-s$; *l'invariante* $(AB)_{r-s}$ *è invece* (*per* $r \geqq s$) diverso da zero; *e si ha quindi:*

$$D(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{n-r+s} . \omega_2^{r-s} (AB)_{r-s} + \omega_1^{n-r+s+1} \omega_2^{r-s-1} (AB)_{r-s-1} + \cdots + \omega_1^n (A). \quad (8)$$

11. È facile ora procedere oltre. Supponiamo sempre che la B contenga soltanto le variabili $x_1, x_2 \dots x_r, \bar{x}_1 . \bar{x}_2 \dots, \bar{x}_r$ e consideriamo un minore qualunque di ordine $k \geqq r$ (*) del determinante $D(\omega_1 \omega_2)$. Questo minore conterrà un certo numero μ di righe, e ν di colonne dalla $(r+1^{ma})$ alla n^{ma}; e saranno evidentemente μ e ν compresi (i limiti inclusi) tra $k-r$ ed $n-r$; detta inoltre σ la caratteristica della matrice di queste μ righe e ν colonne, sviluppando il minore stesso, secondo il teorema di Hesse generalizzato, per i minori di questa matrice, esso avrà come fattore ω_1 con un esponente non minore di $\mu + \nu - \sigma$ (**). Volendo adunque, per un determinato ordine k, ricercare la *minima* potenza di ω_1 che divide un qualunque minore di ordine k di $D(\omega_1, \omega_2)$, convien innanzi tutto cercare quale è, per esso valore di k, il minimo valore che l'espressione $\mu + \nu - \sigma$ può avere.

Convien perciò distinguer due casi:

a) Sia dapprima $k \geqq n-s$. Per render minima l'espressione $\mu + \nu - \sigma$ convien cercare di combinare i minimi valori possibili di μ e ν col massimo pos-

(*) È inutile supporre $k < r$; in questo caso infatti si hanno subito dalle prime r righe e colonne di $D(\omega_1, \omega_2)$ dei minori di ordine k, che non ammettono il fattore ω_1.

(**) Niccoletti, *Alcuni teoremi sui determinanti.* (Annali di Matematica, Tomo VIII della Serie III, pag. 289.)

sibile per σ; si noti ora che evidentemente è $\sigma \leq n - r - s$, ma, inoltre poichè $k \geq n - s$, si possono togliere dal determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ certe $n - k$ tra le ultime $n - r$ righe e colonne, in guisa che il minore di $A_{12\ldots r, 12\ldots r}$ che rimane abbia ancora la caratteristica $n - r - s$: il minimo valore che può dunque assumere $\mu + \nu - \sigma$ si ottiene per $\mu = \nu = k - r$, $\sigma = n - r - s$. Ne segue che *tutti i minori di ordine $k \geq n - s$ del determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ sono divisibili per una potenza di ω_1, il cui esponente non è minore di $2k - n - r + s$.* Ma di più: *esiste sempre un minore di ordine k del determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ che ha il divisore ω_1 ad una potenza uguale e non superiore a $2k - n - r + s$.* Consideriamo infatti un minore *principale* di ordine k che si ottenga sopprimendo le stesse $n - k$ righe e colonne di $A_{12\ldots r, 12\ldots r}$ in guisa che il minore residuo di ordine $k - r$ di $A_{12\ldots r, 12\ldots r}$ abbia ancora la caratteristica $n - r - s$: un tal minore di ordine k può pensarsi allora come il discriminante del fascio di forme che si ha dal fascio $A\omega_1 + B\omega_2$, annullando quelle tra le variabili $x_{r+1} \ldots x_n$ $(\bar{x}_{r+1} \ldots \bar{x}_n)$ che corrispondono alle righe e colonne soppresse: si può dunque ripetere per esso il ragionamento del n.° 10, e quindi esso minore ammette il fattore ω_1 con un esponente non maggiore di $2k - n - r + s$.

b) Sia invece $k < n - s$. Perchè l'espressione $\mu + \nu - \sigma$ abbia il minimo valore possibile, si vede facilmente che conviene ancora fare $\mu = \nu = k - r$ (*); *non* è però allora più possibile dare a σ il valore $n - r - s$: quando infatti $\mu = \nu = k - r$, noi veniamo a sopprimere $n - k > s$ delle ultime $n - r$ righe e colonne: la matrice residua non può avere adunque una caratteristica maggiore di $n - r - (n - k) = k - r$. D'altra parte è anche possibile far in modo che σ abbia questo massimo valore; il minimo valore di $\mu + \nu - \sigma$ è quindi uguale a $k - r$; cioè *per $k < n - s$, tutti i minori di ordine k del determinante $D(\omega_1 \omega_2)$ ammettono il divisore ω_1 con un esponente non minore di $k - r$*, e, come sopra, si vedrà che *esiste certamente qualche minore di D di ordine k che è divisibile per ω_1^{k-r} e non per una potenza superiore.*

Riassumendo, si ha dunque che *il massimo comun divisore dei minori di ordine $k \geq r$ del determinante $D(\omega_1 \omega_2)$ ammette il fattore ω_1 ad una potenza l_k, tale che si ha:*

$$\left.\begin{aligned} l_k &= 2k - n - r + s \qquad \text{per } k \geq n - s \\ l_k &= k - r \qquad \text{per } k < n - s. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*) Basta osservare che diminuendo μ o ν di uno, σ o rimane invariato o diminuisce di *uno*; $\mu + \nu - \sigma$ diminuisce dunque di uno o rimane invariato.

Se quindi si pone:

$$e_\rho = l_{n-\rho+1} - l_{n-\rho}\,, \tag{10}$$

si ottiene:

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_s = 2\,; \qquad e_{s+1} = e_{s+2} = \cdots = e_{n-r} = 1, \tag{11}$$

cioè nel determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ vi sono s divisori elementari uguali ad ω_2^1, $n-r-s$ uguali ad ω_1. Possiamo quindi enunciare il teorema:

VI. *Se il discriminante della forma B (non indefinita) ha la caratteristica r, il determinante $D(\omega_1, \omega_2)$ ha $n-r$ divisori elementari uguali ad una potenza di ω_1; e più precisamente se si annullano (identicamente o no) tutti gli invarianti simultanei $(A\,B)_\rho$ per cui $\rho > r - s$ (con $s \geqq 0$), ma non l'invariante $(A\,B)_{r-s}$, i primi s divisori elementari hanno l'esponente* 2, *gli altri $n-r-s$ l'esponente* 1 (*).

Otteniamo in tal guisa, per via puramente algebrica ed elementare e con maggiore determinatezza, un risultato dedotto già per le forme quadratiche a coefficienti reali dal sig. Gundelfinder coi metodi trascendenti, introdotti dal Weierstrass per lo studio dell'equivalenza di due fasci di forme bilineari (**).

IV.

12. Torniamo alla equazione non omogenea (2) del n.° 4, per notarne alcuni casi importanti.

La forma B sia la forma *unità* $\sum_1^n x_i \bar{x}_i$, che è evidentemente definita positiva.

Si ha: *Se* $A = \sum_1^n{}_{\mu,\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu \bar{x}_\nu$ *è una forma di* Hermite *di prima specie nelle* $2\,n$ *variabili* $x_1, x_2, \ldots x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, *l'equazione di grado* n *in* ω:

$$\left.\begin{array}{c} E(\omega) = |\, a_{\mu\nu} - \omega\, \varepsilon_{\mu\nu} \,| = 0 \\ (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots n;\quad \varepsilon_{\mu\nu} = 0 \text{ per } \mu \neq \nu;\quad \varepsilon_{\mu\mu} = 1) \end{array}\right\} \tag{1}$$

(*) Cf. Muth, l. c., § 1.

(**) Cf. Hesse (Gundelfinder), *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes— Dritte Auflage.* Supp. IV. (Leipzig, Teubner, 1876.)

a) *ha tutte le radici reali;* b) *una radice multipla di ordine* ρ *rende il determinante del primo membro di caratteristica* $n-\rho$; c) *indicando con* $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega)$ *il minore principale che si ha dal determinante* (1) *sopprimendovi le righe e le colonne* $i_1 i_2 \dots i_k$, *l'equazione* $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega)=0$ *ha tutte le radici reali;* d) *le radici di due minori principali consecutivi, di cui uno sia contenuto nell'altro, si separano a vicenda;* e) *se* $i_1 i_2 \dots i_n$ *è una permutazione degli indici* $1, 2, \dots n$, *la serie degli* $n+1$ *minori principali*

$$E(\omega),\ -E_{i_1}(\omega),\ E_{i_1 i_2}(\omega), \dots (-1)^k E_{i_1 \dots i_k}(\omega),\ (-1)^n E_{i_1 i_2 \dots i_n}(\omega) \qquad (2)$$

costituisce per la equazione (1) *una successione di* Sturm.

L'equazione (1) si ottiene appunto quando si ricerca il carattere di una forma di Hermite, se essa sia cioè definita, indefinita, semidefinita. Se ci proponiamo infatti il problema di trovare il massimo ed il minimo dei valori che assume la forma A, quando tra le sue variabili x, $\bar{x}$ si ponga la condizione $\Sigma x_i \bar{x}_i = 1$, (il che, come è evidente, non limita la generalità) dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange siamo condotti alle equazioni:

$$\sum_1^n {}_\mu\, a_{\mu\nu} x_\mu - \omega \,.\, x_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2, \dots n) \qquad (3)$$

(ed alle altre:

$$\sum_1^n {}_\nu\, a_{\mu\nu} \bar{x}_\nu - \omega \bar{x}_\mu = 0)$$

ed, eliminando le x (o le $\bar{x}$) all'equazione (1). Moltiplicando poi per $\bar{x}_\nu$ il primo membro della (3) e sommando rispetto a ν da 1 ad n, vediamo subito che il massimo e minimo cercati sono dati dalla maggiore e minore tra le radici reali della (1). Ove adunque queste radici sian tutte diverse da zero e del medesimo segno, la A sarà definita; sarà invece indefinita, quando la (1) abbia radici di segno contrario: se infine la (1) ha r radici nulle e le altre di un segno costante, la A sarà semidefinita e potrà ridursi ad una forma definita in $n-r$ variabili (e le complesse coniugate).

La (1) dicesi perciò l'*equazione caratteristica* della forma A; i suoi coefficienti si dicono i suoi *invarianti ortogonali*: e il risultato che precede può enunciarsi:

Perchè una forma di Hermite $A = \Sigma a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$ *sia definita positiva (negativa) è necessario e sufficiente che i suoi invarianti ortogonali sian tutti*

diversi da zero ed abbian segni alternati (*abbian tutti il medesimo segno*); *perchè la A sia semidefinita, è invece necessario e sufficiente che i suoi invarianti ortogonali non nulli, abbian segni alternati* (*o il medesimo segno*). *In ogni altro caso la forma A è indefinita* (*).

13. *a*) La forma B si supponga *definita*, ma del resto affatto arbitraria: la (2) è allora *l'equazione di* Christoffel (**); se inoltre la B ha i coefficienti reali, ed è quindi una forma quadratica definita, si ha *l'equazione di* Clebsch (***); se infine anche la A è reale (ed è quindi una forma quadratica) si ha *l'equazione secolare* (****) sotto la sua forma più generale.

b) La forma B contenga solo m variabili $x_1, x_2 \ldots x_m$ (e le coniugate) e sia in esse non indefinita; manchino nella A i prodotti di una qualunque tra le $x_{m+1} \ldots x_n$ per una delle $\bar{x}_{m+1} \ldots \bar{x}_n$. Si ha dalla (2) l'equazione:

$$F(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\,\omega & a_{ir} \\ a_{sk} & 0 \end{vmatrix} = 0 \,(*****) \quad (i, k = 1, 2 \ldots m;\ r, s = m+1 \ldots n) \quad (4)$$

(*) Cf. n.° 1, *b*).

(**) Cf. Christoffel, *Verallgemeinerung einiger Theoreme der H. Weierstrass.* (Crelle, Bd. 63, § 255.)

(***) Cf. Clebsch, *Giornale di Crelle.* Vol. 62; m. c.

(****) Cf. ad es.: Ricci, *Algebra*, pag. 435.

(*****) Ora e nel seguito col simbolo:

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & b_{ir} \\ c_{sk} & d_{sr} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu;\ k = 1, 2 \ldots \nu;\ r = 1, 2 \ldots \rho;\ s = 1, 2 \ldots \sigma)$$

indichiamo la matrice di $\mu + \sigma$ righe e $\nu + \rho$ colonne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\nu} & b_{11} & b_{12} \ldots b_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\nu} & b_{21} & b_{22} \ldots b_{2\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \ldots a_{\mu\nu} & b_{\mu 1} & b_{\mu 2} \ldots b_{\mu\rho} \\ c_{11} & c_{12} \ldots c_{1\nu} & d_{11} & d_{12} \ldots d_{1\rho} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2\nu} & d_{21} & d_{22} \ldots d_{2\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\sigma 1} & c_{\sigma 2} \ldots c_{\sigma\nu} & d_{\sigma 1} & d_{\sigma 2} \ldots d_{\sigma\rho} \end{vmatrix}$$

e se $\mu + \sigma = \nu + \rho$ anche il relativo determinante.

di cui in particolare è ben noto il significato geometrico ed analitico nel caso particolare che le a e b si suppongano reali (e quindi $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$; $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$).

Sia in particolare $n = m + k$, *con* $k < m$ e detti i_1, $i_2 \ldots i_k$ k valori da 1 ad m, poniamo nel primo membro delle (4)

$$a_{i_1, m+1} = a_{i_2, m+2} = \cdots = a_{i_k, n} = a_{m+1, i_1} = a_{m+2, i_2} = \cdots = a_{n, i_k} = 1\,;$$

facciamo invece uguali a zero tutte le altre $a_{\mu\nu}$ per cui uno degli indici μ o ν supera m. La $F(\omega)$ si riduce allora, a mezzo del segno, al minore principale $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega)$ del determinante $D(\omega)$ (in cui sia fatto $n = m$). Poichè questo a sua volta può pensarsi come l'aggiunto in $F(\omega)$ del minore delle ultime k righe e colonne, ne segue che la relazione che lega il determinante $D(\omega)$ ad uno qualunque dei suoi minori principali, può dirsi *reciproca,* nel senso preciso indicato dal ragionamento che precede (cf. n.° 8) (*).

c) La B contenga solo parte delle variabili $x_1 \ldots x_n$, $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$, ad es.: le x_1, $x_2 \ldots x_m$ e sia in esse non indefinita.

Con lievi cambiamenti di notazione, avremo l'equazione:

$$G(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\,\omega & p_{ir} \\ q_{sk} & h_{sr} \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots n;\; r, s = 1, 2 \ldots m) \tag{5}$$

(dove $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$, $b_{ik} = \bar{b}_{ki}$; $p_{ir} = \bar{q}_{ri}$, $h_{rs} = \bar{h}_{sr}$). Si sviluppi ora il determinante (5) per la matrice delle ultime m righe e colonne, secondo il teorema di Hesse generalizzato; si avrà indicando con $[m, n]$ il minore dei due numeri m ed n:

$$\left.\begin{aligned} G(\omega) = \sum_0^{[m,n]}{}_\rho (-1)^\rho \sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_\rho; \beta_1 \ldots \beta_\rho)}^{(1 \ldots n)} \sum_{(\gamma_1 \ldots \gamma_\rho; \delta_1 \ldots \delta_\rho)}^{(1 \ldots m)} D_{\alpha_1 \ldots \alpha_\rho; \beta_1 \ldots \beta_\rho}(\omega)\,. \\ .\, H_{\gamma_1 \ldots \gamma_\rho; \delta_1 \ldots \delta_\rho}\, p_{\alpha_1 \ldots \alpha_\rho; \delta_1 \ldots \delta_\rho}\, q_{\gamma_1 \ldots \gamma_\rho; \beta_1 \ldots \beta_\rho}\,; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

cioè $G(\omega)$ è un aggregato lineare intero dei minori del determinante (2), tale che uguagliato allo zero dà un'equazione con tutte radici reali (che hanno di più relazioni speciali colle radici di $D(\omega) = 0$). Si ha così un risultato, di cui il teorema IV del n.° 8 è un caso particolarissimo. Facendo ad es.: nella (5) $m = 1$, e ponendo per semplicità di scrittura $p_{is} = p_i$, $h_{11} = -h$, si ha che: *l'equazione a coefficienti reali*:

$$H(\omega) = h\, D(\omega) + \sum_1^n{}_{ik} D_{ik}(\omega)\, p_i\, \bar{p}_k = 0 \tag{7}$$

ha tutte radici reali, che si separano a vicenda con quelle della $D(\omega) = 0$ ecc.

(*) In particolare, ne segue che: *Una radice multipla di ordine* ρ *per un minore principale* $\Delta_{i_1 \ldots i_k}(\omega)$ *di ordine* $n - k$ *è multipla per* $D(\omega)$ *dell'ordine* $\rho - k$ almeno.

d) La forma B si decomponga nella somma di due, una nelle variabili $x_1 x_2 \ldots x_m$, l'altra nelle $x_{m+1} \ldots x_n$, ambedue non indefinite, nè definite di segno contrario. Portando anche qui dei lievi cambiamenti di notazione, avremo l'equazione:

$$K(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\,\omega, & p_{ir} \\ q_{sk}, & \alpha_{sr} - \beta_{sr}\,\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, 2 \ldots n;\ r, s = 1, 2 \ldots m) \qquad (8)$$

dove $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$, $b_{ik} = \overline{b}_{ki}$, $\alpha_{sr} = \overline{\alpha}_{rs}$, $\beta_{sr} = \overline{\beta}_{rs}$; $p_{ir} = \overline{q}_{ri}$; sviluppando ancora il determinante del primo membro secondo la matrice delle ultime m righe e colonne, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} K(\omega) = \sum\limits_{0}^{[m,n]}{}_{\rho} (-1)^{\rho} \sum\limits_{(\alpha_1 \ldots \alpha_\rho; \beta_1 \ldots \beta_\rho)}^{(1 \cdots n)} \sum\limits_{(\gamma_1 \ldots \gamma_\rho; \delta_1 \ldots \delta_\rho)}^{(1 \cdots m)} D_{\alpha_1 \cdots \alpha_\rho; \beta_1 \cdots \beta_\rho}(\omega) \,. \\ \qquad \Delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_\rho; \delta_1 \cdots \delta_\rho}(\omega)\, p_{\alpha_1 \cdots \alpha_\rho; \delta_1 \cdots \delta_\rho}\, q_{\gamma_1 \cdots \gamma_\rho; \beta_1 \cdots \beta_\rho} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

avendo indicato con $\Delta(\omega)$ il determinante di ordine m:

$$|\alpha_{sr} - \omega\,\beta_{sr}| = \Delta(\omega) \qquad (10)$$

con $\Delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_\rho; \delta_1 \cdots \delta_\rho}$ i suoi aggiunti. Cioè:

Se $D(\omega) = 0$, $\Delta(\omega) = 0$ sono due equazioni della forma (2) *con radici tutte reali, tali che le due forme B, (β) ad esse relative non siano indefinite, nè abbian segno contrario* (ed a questo ci si può sempre ridurre, cambiando al più il segno della incognita in una delle due equazioni) *l'espressione bilineare intera $K(\omega)$ nei due determinanti $D(\omega)$, $\Delta(\omega)$ e nei loro minori, data dalla* (9), *uguagliata allo zero dà una equazione che ha ancora tutte le radici reali* (ed in particolari relazioni con quelle delle due equazioni $D(\omega) = 0$, $\Delta(\omega) = 0$).

e) Risultati affatto analoghi evidentemente si avrebbero, supponendo che nel determinante (2) la forma B si spezzasse nella somma, non di due sole, ma di più forme, tutte non indefinite nelle loro variabili e del medesimo segno; a tale ovvia estensione del risultato che precede basti avere appena accennato.

f) Poniamo infine nella (8) $m = n$; $b_{ik} = \beta_{ik} = \varepsilon_{ik}$; $a_{rs} = -\alpha_{rs}$; e le a, p si suppongano reali.

Avremo l'equazione a radici tutte reali:

$$L(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - \varepsilon_{ik}\,\omega & p_{ir} \\ -p_{ks} & a_{rs} + \omega\,\varepsilon_{rs} \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k, r, s = 1, 2 \ldots n) \qquad (10)$$

la quale s'incontra nell'integrazione, mediante il metodo di D'Alembert, del

sistema canonico:

$$\frac{d x_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{d y_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{11}$$

essendo:

$$2 H = \sum_1^n{}_{ik}\, p_{ik}\, x_i x_k + 2 \sum_1^n{}_{ik}\, a_{ik}\, x_i y_k + \sum_1^n{}_{ik}\, p_{ik}\, y_i y_k \tag{12}$$

una forma quadratica a coefficienti costanti, ecc., ecc.

g) Se nel primo membro della (8) le due forme $B = \sum_1^n b_{ik}\, x_i \bar{x}_k$, $\beta = \sum_1^m{}_{rs}\, \beta_{rs}\, \xi_r \bar{\xi}_s$ si suppongono tutte due non indefinite, ma di segno contrario, la (8) stessa non avrà più in generale tutte le sue radici reali; si può però ancora in questo caso *assegnare un limite superiore del numero delle sue radici complesse.* La dimostrazione di questa asserzione, insieme con un risultato ancora più generale, risulterà dalla osservazione seguente.

14. Se nel fascio $A - \omega B$ (per ω reale) non sono contenute forme non indefinite, l'equazione $D(\omega) = 0$ relativa al fascio stesso, può non aver più tutte le sue radici reali: quando però si conosca la caratteristica ρ di una delle forme del fascio, si può assegnare per essa equazione un limite superiore del numero delle sue radici complesse: *queste non possono essere in numero maggiore di* 2ρ.

Ricordiamo (*) chiamarsi *caratteristica* di una forma di Hermite il minore ρ dei due numeri p e q che si hanno quando la forma stessa si riduca (con sostituzioni complesse coniugate sulle variabili x, $\bar{x}$) alla forma normale *irriducibile:*

$$\sum_1^p{}_\alpha\, \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_1^q{}_\beta\, \xi'_\beta \bar{\xi}'_\beta ;$$

(è allora anche p il numero delle radici positive, q il numero delle radici negative della equazione *caratteristica* della forma considerata (cf. n.° 12) ed $r = p + q$ sarà la sua classe (cf. n.° 3 *a*))

Sia allora ad es.: ρ la caratteristica della forma B; si potrà, ed in infiniti modi, con sostituzioni complesse coniugate sulle variabili x, $\bar{x}$, trasformare la B nella somma di due forme di Hermite, l'una non indefinita in

(*) Cf. A. Loewy, *Ueber Schaaren reeller quadratischer und Hermitescher Formen.* (Giornale di Crelle, Vol. 122; pag. 67, 1900.)

$2(n-\rho)$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_{n-\rho}$; $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{n-\rho}$, l'altra *definita* e di segno *contrario* alla precedente nelle rimanenti 2ρ; $x_{n-\rho+1}, \ldots, x_n$; $\bar{x}_{n-\rho+1}, \ldots, \bar{x}_n$ (sarà insieme anche: $\rho \leq n-\rho$). L'equazione $D(\omega)=0$ relativa al fascio $A-\omega B$ si scriverà allora:

$$M(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\omega & a_{ir} \\ a_{sk} & a_{sr} - b_{sr}\omega \end{vmatrix} = 0 \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots n-\rho \\ r, s = n-\rho+1, \ldots n \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Consideriamo ora il determinante di ordine $n+\rho$:

$$N(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\omega & a_{ir} & 0 \\ a_{sk} & a_{sr} - b_{sr}\omega & \eta'_{s\nu} \\ 0 & \eta_{\mu r} & 0 \end{vmatrix}, \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots n-\rho \\ r, s = n-\rho+1, \ldots n \\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots \rho \end{pmatrix} \qquad (14)$$

nel quale si è posto:

$$\eta_{\mu r} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \Big\} \text{ per } \Big\{ \begin{matrix} \mu = r-(n-\rho) \\ \mu \neq r-(n-\rho) \end{matrix}; \quad \eta'_{s\nu} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \Big\} \text{ per } \Big\{ \begin{matrix} \nu = s-(n-\rho) \\ \nu \neq s-(n-\rho) \end{matrix}; \qquad (15)$$

sviluppandolo secondo i minori delle ultime ρ righe e colonne, si ha:

$$N(\omega) = (-1)^\rho \, | a_{ik} - b_{ik}\omega |; \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-\rho) \qquad (16)$$

inoltre un procedimento del tutto analogo dimostra che un minore *qualunque* dell'ordine $n+\rho-s$ (con $s < n-\rho$) del determinante (14) è una funzione lineare omogenea dei minori di ordine $n-\rho-s$ e di ordine superiore del determinante (16). Ricordando le ipotesi fatte, ne segue:

a) *L'equazione $N(\omega)=0$* (il cui grado è minore od uguale ad $n-\rho$) *ha tutte le radici reali.*

b) *Una radice ω multipla di essa equazione di ordine μ (evidentemente $< n-\rho$) ne rende il primo membro di caratteristica $n+\rho-\mu$.*

Un ragionamento affatto analogo a quello del n.° 7 dimostra anche:

c) *Si può coi minori principali del determinante $N(\omega)$,* (non identicamente nulli) *costruire una successione di* Sturm *per l'equazione stessa.*

In particolare si potrà costruire una tale successione, in guisa che in essa figuri come termine $(\rho+1)^{mo}$ il determinante (13). Se quindi indichiamo con μ il grado della equazione $N(\omega)=0$, la $M(\omega)=0$ avrà almeno $\mu-\rho$ radici reali (*); ma il suo grado è uguale a $\mu+\rho$; quindi, come si era affermato, essa *non può avere più di 2ρ radici complesse* (**).

(*) È questa, come si riconosce facilmente, una proprietà di qualsiasi successione di Sturm per equazioni a radici tutte reali.

(**) Cf. A. Loewy, l. c., pag. 69.

V.

15. Se sulle due forme bilineari:

$$A = \Sigma_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu\,; \quad B = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ldots\ n) \tag{1}$$

non si fa alcuna ipotesi particolare, l'equazione

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - b_{ik}\,\omega\,| = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ldots\ n) \tag{2}$$

avrà in generale coefficienti e radici complesse: potrà però in casi speciali avere ancora coefficienti reali o tale ridursi moltiplicandone il primo membro per un'opportuna costante. Questo in particolare avverrà quando ogni elemento

$$e_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - \omega\, b_{\mu\nu} \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ldots\ n) \tag{3}$$

del determinante $D(\omega)$, suppostovi ω reale, per lo scambio di i in $-i$, si muti in una combinazione lineare omogenea degli elementi primitivi, tale che il nuovo determinante sia uguale all'antico, moltiplicato per un fattore non nullo; e queste condizioni saranno evidentemente soddisfatte, quando, indicando con λ_{rs}, $\rho_{\sigma\tau}$ $(r,\ s,\ \sigma,\ \tau = 1,\ 2,\ldots\ n)$ $2\,n^2$ quantità, tali che i due determinanti

$$\Lambda = |\,\lambda_{rs}\,|\,; \quad \mathrm{P} = |\,\rho_{sr}\,| \tag{4}$$

sian diversi da zero, si abbiano le relazioni:

$$\overline{e}_{ik} = \Sigma_{\mu\nu}\, \lambda_{i\mu}\, \rho_{k\nu}\, e_{\mu\nu}\,, \quad (i,\ k,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ldots\ n) \tag{5 a}$$

o le altre:

$$\overline{e}_{ik} = \Sigma_{\mu\nu}\, \lambda_{i\nu}\, \rho_{k\mu}\, e_{\mu\nu}\,; \quad (i,\ k,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ldots\ n) \tag{5 b}$$

in ambedue i casi infatti, indicando con $\overline{D}$ il determinante delle $\overline{e}_{\mu\nu}$, si ha la relazione:

$$\overline{D} = \Lambda\,.\,\mathrm{P}\,.\,D$$

(ed i due gruppi di formule corrispondono a due modi diversi di moltiplicazione dei determinanti del secondo membro) (*). Quando adunque valgano

(*) Si osservi che le (5) rimangono inalterate, moltiplicando le λ, e dividendo le ρ per un numero arbitrario α, diverso da zero; di tale arbitrarietà convien tener conto nel seguito.

per gli elementi $e_{\mu\nu}$ le relazioni (5 *a*) o (*b*), l'equazione (2) potrà ridursi ad avere i coefficienti reali e quindi, ove ammetta una radice complessa, ammetterà anche la complessa coniugata. *Le equazioni che in tal guisa si ottengono sono essenzialmente diverse da quelle già considerate?*

Per rispondere a tale questione, discutiamo più da vicino le relazioni (5), e noi studieremo le (5 *b*) che sole presentano un vero interesse; ma una discussione del tutto analoga può farsi sulle (5 *a*).

Risolviamo le (5 *b*) rispetto alle $e_{\mu\nu}$; indicando con Λ_{ik}, P_{ik} gli aggiunti in Λ, P degli elementi λ_{ik}, ρ_{ik}, divisi per Λ, P, abbiamo:

$$e_{ik} = \Sigma_{\mu\nu}\, \Lambda_{\mu k} \,.\, \mathrm{P}_{\nu i} \,.\, \overline{e}_{\mu\nu},$$

e cambiando in questa relazione ogni elemento nel complesso coniugato:

$$\overline{e}_{ik} = \Sigma_{\mu\nu}\, \overline{\Lambda}_{\mu k} \,.\, \overline{\mathrm{P}}_{\nu i} \,.\, e_{\mu\nu}. \qquad (6)$$

Se, come supponiamo, le $e_{\mu\nu}$ non soddisfano ad altre relazioni, distinte dalle (5 *b*), devono le (6) coincidere con queste; deve aversi cioè, per tutti i possibili valori degli indici i, k, μ, ν:

$$\lambda_{i\nu}\, \rho_{k\mu} = \overline{\Lambda}_{\mu k} \,.\, \overline{\mathrm{P}}_{\nu i}, \qquad (7)$$

e quindi anche, *indicando con* η *un'opportuna costante;*

$$\rho_{k\mu} = \eta \,.\, \overline{\Lambda}_{\mu k}; \qquad \lambda_{i\nu} = \eta^{-1}\, \overline{\mathrm{P}}_{\nu i}. \qquad (8\,a)$$

Da queste relazioni poi si ha:

$$\mathrm{P} = \eta^{n} \,.\, \overline{\Lambda}^{-1}, \qquad \Lambda = \eta^{-n} \,.\, \overline{\mathrm{P}}^{-1}$$

e cambiando in quest'ultima i in $-i$:

$$\mathrm{P}^{-1} = \overline{\eta}^{n} \,.\, \overline{\Lambda}$$

donde infine

$$(\eta\, \overline{\eta})^{n} = 1;$$

cioè la costante η ha il modulo 1: quindi si può porre, indicando con α un numero reale:

$$a)\quad \rho_{k\mu} = e^{2i\alpha} \,.\, \overline{\Lambda}_{\mu k}; \qquad b)\quad \lambda_{i\nu} = e^{-2i\alpha} \,.\, \overline{\mathrm{P}}_{\nu i}. \qquad (8^{*})$$

Le (8*) possono ancora semplificarsi; poniamo infatti, il che non altera le 5 *b*):

$$\lambda'_{i\nu} = e^{i\alpha}\, \lambda_{i\nu}; \qquad \rho'_{k\mu} = e^{-i\alpha} \,.\, \rho_{k\mu};$$

sarà allora:

$$\overline{\Lambda}'_{\mu k} = e^{i\alpha} \,.\, \overline{\Lambda}_{\mu k}\,; \qquad \overline{P}'_{\nu i} = e^{-i\alpha} \,.\, \overline{P}_{\nu i}$$

e per le (8*):

$$\rho'_{k\mu} = \overline{\Lambda}'_{\mu k}\,, \qquad \lambda'_{i\nu} = \overline{P}'_{\nu i}$$

o, tornando per semplicità ad omettere gli indici:

$$a) \quad \rho_{k\mu} = \overline{\Lambda}_{\mu k}\,; \qquad b) \quad \lambda_{i\nu} = \overline{P}_{\nu i}\,. \tag{8**}$$

Ricordiamo ora che l'equazione (2) è invariante per trasformazioni lineari sulle x e sulle y; è quindi naturale proporsi il problema di ridurre mediante tali trasformazioni le relazioni (5 b) alla forma la più semplice possibile. Indichiamo per questo con g_{rs} n^2 quantità perfettamente arbitrarie, colla sola condizione che il loro determinante G sia diverso da zero, e determiniamo poi altre n^2 quantità h_{pq} dalle relazioni lineari:

$$a) \quad \overline{h}_{\beta s} = \sum_1^n{}_\mu \, \rho_{s\mu}\, g_{\beta\mu} \qquad (\beta,\ s = 1,\ 2 \ldots n)\,; \tag{9}$$

siano allora anche, in virtù delle (8**):

$$b) \quad \overline{g}_{\alpha r} = \sum_1^n{}_\nu \, \lambda_{r\nu}\, h_{\alpha\nu}\,, \qquad (\alpha,\ r = 1,\ 2 \ldots n) \tag{9}$$

ed il determinante $H = |\, h_{\beta s} |$ sarà anche esso diverso da zero. Eseguiamo allora sulle x e sulle y le trasformazioni lineari:

$$a) \quad x'_\alpha = \sum_1^n{}_r \, g_{\alpha r}\, x_r\,; \qquad b) \quad y'_\beta = \sum_1^n{}_s \, h_{\beta s}\, y_s \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2 \ldots n)\,; \tag{10}$$

la forma $E = \Sigma\, e_{ik}\, x_i\, y_k$ si muterà con ciò nella $E' = \Sigma\, e'_{\alpha\beta}\, x'_\alpha\, y'_\beta$, dove, con notazioni usate, si ha:

$$e'_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_{ik} \, G_{ki}\, H_{\beta k}\, e_{ik} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2 \ldots n). \tag{11}$$

Mutiamo nella (11) ogni elemento nel suo coniugato; tenendo allora conto delle 5 b) e risolvendo le (11) rispetto alle e_{ik}, abbiamo:

$$\overline{e}'_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_{ikrs\mu\nu} \, \lambda_{i\nu}\, \rho_{k\mu}\, g_{r\mu}\, h_{s\nu}\, \overline{G}_{\alpha i}\, \overline{H}_{\beta k}\, e'_{rs}$$

e per le (9) a) b) semplicemente:

$$\overline{e}'_{\alpha\beta} = e'_{\beta\alpha}\,; \tag{12}$$

cioè: *la forma* $E' = \Sigma\, e'_{\alpha\beta}\, x'_\alpha\, \overline{y}'_\beta$ *è una forma di* Hermite *di prima specie.*

Quelle equazioni dunque per cui hanno luogo le relazioni (5 *b*) non sono essenzialmente distinte da quelle che abbiamo già considerato (*).

16. Nella equazione (2) una delle due forme, la B, si supponga di HERMITE, di prima specie, *e (totalmente) definita* (**); la A sia invece qualunque. La equazione (2) avrà allora in generale coefficienti e radici *complesse, le quali però soddisfano a particolari limitazioni.*

Sia infatti $\omega = p + i q$ una radice della (2): le equazioni

$$\Sigma_\mu (a_{\mu\nu} - \omega\, b_{\mu\nu})\, x_\mu = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots\ n) \tag{13}$$

ammetteranno allora delle soluzioni $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ non *tutte* nulle. Cambiamo in queste relazioni ogni elemento nel suo complesso coniugato e l'indice μ in ν; avremo:

$$\Sigma_\nu (\bar{a}_{\nu\mu} - \bar{\omega}\, b_{\mu\nu})\, \bar{x}_\nu = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots\ n). \tag{13*}$$

Moltiplichiamo allora la (13) per $\bar{x}_\nu$ e sommiamo rispetto all'indice ν da 1 ad n; moltiplichiamo la (13*) per x_μ e sommiamo rispetto a μ da 1 ad n: sommando e sottraendo i due risultati abbiamo:

$$(a) \quad p \,.\, B(x,\ \bar{x}) = H(x,\ \bar{x}) \qquad (b) \quad q \,.\, B(x,\ \bar{x}) = K(x,\ \bar{x})$$

essendo:

$$\left.\begin{aligned} H(x,\ \bar{x}) &= \Sigma_{\mu\nu}\, h_{\mu\nu}\, x_\mu\, \bar{x}_\nu = \Sigma_{\mu\nu} \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2}\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \\ K(x,\ \bar{x}) &= \Sigma_{\mu\nu}\, k_{\mu\nu}\, x_\mu\, \bar{x}_\nu = \Sigma_{\mu\nu} \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i}\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(*) Una discussione affatto analoga può evidentemente farsi sulle (5 *a*); ne seguirebbe facilmente che le equazioni che in questo modo si ottengono non differiscono essenzialmente da quelle in cui *tutti* gli elementi $e_{\mu\nu}$ sono numeri reali, del resto, come è ben naturale, affatto arbitrarî. Ci sia permesso anche ricordare qui un'altra classe di equazioni algebriche della forma (2) a radici reali, considerate per la prima volta dal sig. GUNDELFINDER [1], per osservare che esse non sono essenzialmente distinte da quelle già da noi studiate, a cui si riducono moltiplicandone il primo membro per un particolare determinante simmetrico e diverso da zero.

(**) (oppure tale si riduca con opportune sostituzioni lineari sulle variabili (cf. n. 15). Queste sostituzioni si supporranno allora già eseguite sulla B e sulla A).

[1] Cf. DINGELDEY, *Ueber die Discriminante einer gevissen quadratischen Gleichung.* (Giornale di Crelle, Vol. 122, pag. 188, nota 4.)

due particolari forme di Hermite di prima specie, *dedotte* dalla A. Se quindi indichiamo con ρ e σ due indeterminate affatto arbitrarie, avremo anche:

$$(\rho p + \sigma q) B(x, \bar{x}) = \rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x}). \qquad (15)$$

Dalla (15) si possono trarre in *due* modi diversi delle limitazioni per la radice $\omega = p + i q$.

a) Indichiamo con ε quella radice della equazione *caratteristica* della forma B che ha il minimo valore assoluto; sarà, poichè la B è definita, $|\varepsilon| > 0$. Dividiamo allora la (20) per la quantità $\Sigma x_\mu \bar{x}_\mu$ evidente non nulla; avremo immediatamente la disuguaglianza:

$$|\rho p + \sigma q| \cdot |\varepsilon| < E_{\rho\sigma} \cdot \frac{\Sigma |x_\mu| . |x_\nu|}{\Sigma x_\mu \bar{x}_\mu} \text{ (*)} \qquad (21)$$

dove abbiamo indicato con $E_{\rho\sigma}$ il massimo modulo dei coefficienti della forma bilineare

$$E^{(\rho,\sigma)}(x, \bar{x}) = \rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x}).$$

Ma dalla disuguaglianza tra quantità reali:

$$|k_1 + k_2 + \cdots + k_m|^2 \leqq m\, |k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2| \text{ (**)}$$

segue immediatamente:

$$\Sigma |x_\mu| |x_\nu| = |\Sigma |x_\mu||^2 < n\, \Sigma x_\mu \bar{x}_\mu$$

e quindi anche, per la (16), si ha la disuguaglianza:

$$|\rho p + \sigma q| < n \cdot \frac{E_{\rho\sigma}}{|\varepsilon|},$$

che è appunto una delle limitazioni cercate. Adunque:

Se la B è una forma definita di Hermite, *indicando con $E_{\rho\sigma}$ il massimo modulo delle n^2 quantità*

$$e_{\mu\nu}^{(\rho,\sigma)} = \rho \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2 i} \qquad (17)$$

(*dove ρ e σ sono due indeterminate affatto arbitrarie*) *chiamando inoltre con ε la minima, in valore assoluto, delle radici della equazione caratteristica della B*,

(*) È infatti $|\varepsilon| . \Sigma x_\mu \bar{x}_\mu < |B(x, \bar{x})|$.

(**) La disuguaglianza in questione è equivalente all'altra evidente $\sum_{(i,j)} (k_i - k_j)^2 \geqq 0$.

si ha per una qualunque radice $\omega = p + iq$ *della equazione* (2) *la limitazione:*

$$|\rho p + \sigma q| < n \cdot \frac{E_{\rho\sigma}}{|\varepsilon|}. \tag{18}$$

Facendo nella (18) successivamente $\rho = 1$, $\sigma = i$; $\rho = 1$, $\sigma = 0$; $\rho = 0$, $\sigma = 1$ si ha la prima parte di un teorema enunciato dal sig. HIRTSCH (*), nel caso particolare che la B sia la forma *unità* $\Sigma_\mu x_\mu \bar{x}_\mu$.

b) Se le indeterminate ρ e σ si suppongono *reali*, la forma:

$$\rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x})$$

è una forma di HERMITE di *prima* specie, e tale è anche l'altra:

$$s B(x, \bar{x}) - \rho H(x \bar{x}) - \sigma K(x, \bar{x}) \tag{19}$$

in cui s è una variabile reale affatto arbitraria. Per i valori di s sufficientemente grandi in valore assoluto la (19) è una forma di HERMITE *definita* e tale resta, finchè *s è esterno* all'intervallo tra la massima e minima radice dell'equazione in ω (con radici tutte reali):

$$|\rho h_{\mu\nu} + \sigma k_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n). \tag{20}$$

Questa asserzione si può dimostrare, sia deducendola da un noto teorema di WEIERSTRASS sulle forme quadratiche (che immediatamente si estende alle

(*) Cf. A. HIRTSCH, *Sur les racines d'une équation fondamentale.* (Acta Mathematica, Tom. 25, fasc. 3.° e 4.°, pag. 367. Settembre 1902.) Non sarebbe difficile completare il risultato antecedente in guisa da ottenere anche la seconda parte del teorema ricordato (1.° della nota) di HIRTSCH. Si supponga infatti che per un particolare valore $\frac{\rho_1}{\sigma_1}$ del rapporto $\frac{\rho}{\sigma}$ la forma

$$\rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x})$$

sia una forma *emisimmetrica* nelle variabili x_μ, $\bar{x}_\mu$. Con metodo analogo all'antecedente (cf. HIRTSCH, l. c., pag. 370) la disuguaglianza (18) può sostituirsi coll'altra più ristretta:

$$|\rho_1 p + \sigma_1 q| < \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{E \rho_1 \sigma_1}{|\varepsilon|}.$$

Cf. anche: BEDINXON I. *Sur les racines d'une équation fondamentale. Ofversigt af Kongl. Veterskaps. Akademiens Förandlingar 1900. N. 95 Stockholm,* (ristampata negli Acta Mathematica. Tom. 25°, pag. 319).

forme di HERMITE (*)), sia direttamente al modo seguente: Consideriamo, con s *reale*, l'equazione

$$\left| -\frac{e_{\mu\nu}}{s} + b_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\omega \right| = 0; \qquad (e_{\mu\nu} = \rho\, h_{\mu\nu} + \sigma\, k_{\mu\nu}) \tag{21}$$

essa ha tutte le radici reali e funzioni continue della variabile reale s, che per s sufficientemente grande in valore assoluto sono prossime a quelle della equazione

$$| b_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\omega | = 0$$

tanto quanto si vuole, son quindi tutte diverse da zero e del medesimo segno. Perchè ora la forma (19) non sia più definita è necessario che una almeno delle radici della equazione (21) si annulli o acquisti un segno contrario a quello di prima: ma, trattandosi di funzioni *reali* e continue della variabile reale s, deve per questo necessariamente passar per lo zero; ora perchè la (21) abbia una radice nulla, è necessario che sia

$$\left| -\frac{e_{\mu\nu}}{s} + b_{\mu\nu} \right| = 0,$$

s deve cioè soddisfare alla equazione (20). Ne segue immediatamente l'affermazione superiore.

Ciò posto, si osservi che per la (15) la forma (19) non è certo definita quando sia $s = \rho p + \sigma q$. Se ne deduce il teorema:

Se la B è una forma definita di HERMITE, *ed, essendo* ρ e σ *due indeterminate reali affatto arbitrarie, si dicono* $m_{\rho\sigma}$, $M_{\rho\sigma}$ *la minima e massima radice della equazione:*

$$\left| \rho\, \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma\, \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2\,i} - \omega\, b_{\mu\nu} \right| = 0, \tag{20}$$

per una qualunque radice $\omega = p + i\,q$ *della equazione* (2) *si ha la limitazione:*

$$m_{\rho\sigma} \leqq \rho\, p + \sigma\, q \leqq M_{\rho\sigma}.$$

Poniamo in particolare $\rho = 1$, $\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\sigma = 1$; abbiamo:

Nelle stesse ipotesi, la parte reale p *di una radice* ω *della equazione* (2) *è compresa tra la massima e minima radice della equazione:*

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} - \omega\, b_{\mu\nu} \right| = 0, \tag{20 p}$$

(*) Cf. WEIERSTRASS, Werke. Bd. I. Seite 242-243.

il coefficiente q dell'immaginario tra la massima e minima radice dell'altra equazione:

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} - \omega\, b_{\mu\nu} \right| = 0. \qquad (20\,q)$$

La prima parte di questo teorema è dovuta, in casi particolari, ai signori Ivar Bedinxon e A. Hirtsch (*).

Osservando inoltre che si ha:

$$\left| |p| - |q| \right| \leq |p + i q| \leq |p| + |q|,$$

e prendendo nella (20) in modo opportuno ρ e σ uguali all'unità positiva o negativa, si hanno da essa anche delle altre limitazioni per il modulo $|p + i q|$ di una radice qualunque della equazione (2).

Se, infine, in particolare si fa $a_{\mu\nu} = \bar{a}_{\nu\mu}$, si ha di nuovo il teorema I, nel caso particolare che la forma B sia totalmente definita; supponendo invece che si abbia $a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu} = 0$ (e quindi la forma A sarà ancora di Hermite, ma di *seconda* specie, la B di prima e totalmente definita) si ottiene per la (20 p) un'equazione con *tutte radici immaginarie pure* (**).

17. Conviene studiar direttamente quest'ultimo caso, che conduce a risultati interessanti. Siano dunque ancora A e B due forme di Hermite nelle $2n$ variabili x_ν, $\bar{x}_\nu$; e la B sia di *prima specie* e *non indefinita;* la A sia invece di *seconda* specie. Ci riduciamo subito al caso già studiato, in cui le A e B sono ambedue di prima specie, cambiando nella (2) ω in $i\theta$, e quindi dividendo per i^n il primo membro. Infatti in tal guisa la B rimane immutata, la A si cambia nella $\frac{1}{i} A$ che è di prima specie; donde appunto segue che *l'equazione $D(\omega) = 0$ ha tutte le radici immaginarie pure.*

Se inoltre le due forme A e B si suppongono a coefficienti reali, cioè la A si suppone reale ed emisimmetrica, la B reale, simmetrica e non inde-

(*) Bedinxon ed Hirtsch, (note citate. Teorema II' e II). Non è forse inutile osservare a questo proposito che il teorema superiore fu pubblicato da me nella nota ricordata ai Lincei del *luglio* 1902.

(**) Più generalmente, ove sia $a_{\mu\nu} = e^{i\theta} \cdot \bar{a}_{\nu\mu}$ con θ reale, le radici della (2) sono situate sulla retta che fa coll'asse reale un angolo uguale a $\frac{\theta}{2}$.

finita, la (2) avrà i coefficienti reali; e quindi, dividendone eventualmente il primo membro per ω quando il suo grado sia dispari, e ponendo:

$$\omega^2 = - u, \tag{21}$$

si ottiene da essa *un'equazione* $H(u) = 0$ *con radici tutte reali e positive* (o nulle).

Questa equazione $H(u) = 0$ gode di proprietà notevoli, che si hanno immediatamente dalle proprietà già dimostrate per l'equazione in θ.

Consideriamo ad es. il caso più semplice, che la forma B sia irriducibile e quindi totalmente definita; (risultati affatto identici si hanno anche negli altri casi, solo richiedono una discussione più minuta) e sia u una radice, positiva e *diversa da zero*, della $H(u) = 0$, multipla per essa di ordine ρ. Ciascuno dei due valori $\pm \sqrt{u}\,(\pm i \sqrt{u})$ è allora una radice multipla di ordine ρ dell'equazione in $\theta(\omega)$ e quindi rende il determinante del primo membro di caratteristica $n - \rho$. Si osservi ora che un qualunque minore principale del determinante $D(\omega)$, diviso per ω quando il suo grado sia dispari, è una funzione razionale intera in u a coefficienti reali, e tale è anche, come subito si riconosce, il prodotto di due minori coniugati. Ne segue che la radice considerata u soddisfa con determinata moltiplicità a tutte le equazioni in u che si hanno, nel modo ora detto, dai minori del determinante $D(\omega)$ fino all'ordine $n - \rho + 1$, non soddisfa invece a tutte quelle dell'ordine $n - \rho$: e inversamente tali proprietà sono caratteristiche perchè la radice u considerata della $H(u) = 0$ sia per essa multipla dell'ordine ρ. È facile vedere come tali risultati si modificano per la radice *zero*, che la $H(u) = 0$ eventualmente può ammettere.

Consideriamo un qualunque minore principale di $D(\omega)$; se $n - k$ è il suo ordine (ed il suo grado in ω), poniamo colle solite notazioni:

$$D_{i_1 \cdots i_k}(\omega) = \frac{i^{n-k-\varepsilon}}{\omega^\varepsilon} \cdot G_{i_1 \cdots i_k}(u) \qquad \begin{cases} \varepsilon = 1, & \text{per} \quad n - k \equiv 1 \pmod 2 \\ \varepsilon = 0, & \text{per} \quad n - k \equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \tag{22}$$

per due qualunque minori coniugati, poniamo invece:

$$D_{i_1 \cdots i_k; j_1 \cdots j_k}(\omega) \,.\, D_{j_1 \cdots j_k; i_1 \cdots i_k}(\omega) = (-1)^{n-k}\, G_{i_1 \cdots i_k; j_1 \cdots j_k}(u)\,; \tag{22'}$$

passando per la equazione in θ, si riconosce subito che $G_{i_1 \cdots i_k; j_1 \cdots j_k}(u)$ è una funzione razionale intera in u a coefficienti reali, *che non è mai negativa per* u *positivo.*

Con queste notazioni l'uguaglianza (12) del n.° 7 si traduce in un'ugua-

glianza della forma:

$$\left.\begin{aligned} u^{\eta}\, G_{i_1\ldots i_k}(u)\, G_{i_1\ldots i_k, i_{k+1} i_{k+2}}(u) = u^{\zeta}\, G_{i_1\ldots i_k, i_{k+1}}(u)\, G_{i_1\ldots i_k, i_{k+2}}(u) - \\ - G_{i_1\ldots i_k, i_{k+1}; i_1\ldots i_k i_{k+2}}(u) \quad (\eta,\ \zeta = 1,\ 0) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

e quindi:

Se un valore positivo u *annulla una delle* $G_{i_1\ldots i_k}(u)$, *due qualunque* $G_{i_1\ldots i_k, i_{k+1}}(u)$, $G_{i_1\ldots i_k, i_{k+2}}(u)$ (*in essa* contenute) *hanno per quel valore di* u *segni uguali; due qualunque che la comprendono hanno invece valori di segno contrario.*

Indichiamo con $G_{i_1}(u)$ una delle funzioni G corrispondente ad un minore principale di ordine $n-1$.

Si ha facilmente (cf. n.i 8, 6) che per ogni radice *positiva* u della $H(u) = 0$, il rapporto $\dfrac{H'(u)}{G_{i_1}(u)}$ ha il segno *contrario* a quello della forma B. Se quindi indichiamo con η l'unità negativa o positiva, secondochè la B è positiva o negativa, e poniamo

$$\eta^k\, G_{i_1\ldots i_k}(u) = H_{i_1\ldots i_k}(u), \tag{24}$$

la successione di funzioni

$$H(u),\ H_{i_1}(u),\ H_{i_1 i_2}(u)\ldots H_{i_1\ldots i_n}(u) \tag{25}$$

(dove $i_1 \ldots i_n$ è una determinata permutazione degli indici 1, 2,... n) *costituisce per la* $H(u) = 0$ *una successione di* Sturm *per le sue radici diverse da zero (e positive).*

Un ragionamento del tutto identico a quello del teorema IV (n.° 8) dimostra infine che:

Due qualunque equazioni

$$G_{i_1\ldots i_k}(u) = 0, \quad G_{i_1\ldots i_k i_{k+1}}(u) = 0$$

che risultano da due minori principali del determinante (2) *di cui l'uno sia contenuto nell'altro, hanno radici tutte reali e che si separano a vicenda.*

Se infine la forma B è indefinita e ρ è la sua caratteristica, *l'equazione* $H(u) = 0$ *non può avere più di* ρ *radici che non siano reali e positive.*

VI.

18. I risultati che precedono possono estendersi (almeno in parte) in due sensi diversi, sia rimanendo nel caso di una sola equazione, sia passando a sistemi di equazioni. Ci limiteremo, in quel che segue, allo studio dei casi più semplici che si presentano nell'una e nell'altra estensione.

Consideriamo perciò tre forme bilineari in $2n$ variabili $x_1 x_2 \dots x_n$; $y_1 y_2 \dots y_n$:

$$A = \Sigma_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu ; \quad B = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu y_\nu ; \quad C = \Sigma_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu ; \quad (\mu = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

e l'equazione algebrica in ω:

$$E(\omega) = | a_{\mu\nu} + 2\omega b_{\mu\nu} + \omega^2 c_{\mu\nu} | = 0. \tag{2}$$

Questa equazione è ancora essa invariante per trasformazioni lineari omogenee sulle x e sulle y; e se ω_r è una sua radice, ai due sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite $x^{(r)}$ $(y^{(r)})$:

$$\left.\begin{array}{ll} (a_r) & \sum_1^n {}_\mu (a_{\mu\nu} + 2\omega_r b_{\mu\nu} + \omega_r^2 c_{\mu\nu}) x_\mu^{(r)} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots n) \\ (b_r) & \sum_1^n {}_\nu (a_{\mu\nu} + 2\omega_r b_{\mu\nu} + \omega_r^2 c_{\mu\nu}) y_\nu^{(r)} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots n) \end{array}\right\} \tag{3}$$

si può soddisfare con n quantità $x^{(r)}$ $(y^{(r)})$ *non tutte nulle*; ed ancora, se ω_r ed ω_s sono due radici *diverse* della equazione stessa, e con $x^{(r)}$, $(y^{(r)})$; $x^{(s)}$, $(y^{(s)})$ si indicano delle *soluzioni* dei corrispondenti sistemi di equazioni (3), procedendo come al n.° 4, si hanno le *tre* relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) + (\omega_r + \omega_s) C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0, \\ (b) & A(x^{(r)}, y^{(s)}) - \omega_r \omega_s C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0, \\ (c) & \left(\frac{1}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_s}\right) A(x^{(r)}, y^{(s)}) + 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

delle quali la prima e la terza seguono l'una dall'altra cambiando ω in $\frac{1}{\omega}$.

19. Siano ora le A, B, C tre forme di Hermite di *prima* specie: l'equazione (2) avrà allora i coefficienti reali; e se $\omega_1 = p + iq$, $\omega_2 = p - iq$ ne sono due radici complesse coniugate, come al n.° 5, si vedrà che nelle corrispondenti equazioni (3) le $x_\mu^{(1)}$, $y_\mu^{(2)}$; $y_\mu^{(1)}$, $x_\mu^{(2)}$, *possono* supporsi complesse coniugate: le (4) a), b), c) dànno allora, fattovi $r = 1$, $s = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &(a) \qquad B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) + p\, C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = 0, \\ &(b) \qquad A(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) - (p^2 + q^2)\, C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = 0, \\ &(c) \qquad p\, A(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) + (p^2 + q^2)\, B(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sia invece ω una radice reale della (2); derivando abbiamo, con notazioni analoghe a quelle del § 6:

$$E'(\omega) = 2 \sum_1^n{}_{\mu\nu} (b_{\mu\nu} + \omega\, c_{\mu\nu})\, E_{\mu\nu}(\omega) \tag{6}$$

ma, come al n.° 6, si può porre:

$$E_{\mu\nu}(\omega) = \pm\, p_\mu \,.\, \bar{p}_\nu \tag{7}$$

e quindi anche sarà:

$$E'(\omega) = \pm\, 2\, \{ B(p, \bar{p}) + \omega\, C(p, \bar{p}) \}\,. \tag{6'}$$

Poichè infine per ω reale, un qualunque minore principale del determinante $E(\omega)$ è ancora reale, due minori coniugati sono complessi coniugati, dalla uguaglianza:

$$\left.\begin{aligned} E_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega)\,.\,E_{i_1\ldots i_k i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) = E_{i_1\ldots i_k i_{k+1}}(\omega)\,.\,E_{i_1\ldots i_k i_{k+2}}(\omega) - \\ - E_{i_1\ldots i_k i_{k+1}; i_1\ldots i_k i_{k+2}}(\omega)\,.\,E_{i_1\ldots i_k, i_{k+2}; i_1\ldots i_k, i_{k+1}}(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

seguono delle proprietà affatto analoghe a quelle del n.° 7.

20. Consideriamo ora alcuni casi particolari.

a) Una delle forme *estreme*, ad es.: la C sia definita, $\left(\text{ove lo sia la } A\text{, basta cambiare } \omega \text{ in } \frac{1}{\omega}\right)$; le (5) ($a$) ($b$) danno allora immediatamente (cf. anche n.° 16).

La parte reale di una radice complessa della equazione (2) *è sempre compresa tra la massima e minima radice dell'equazione in* λ *(a radici tutte*

reali):

$$| b_{\mu\nu} + \lambda c_{\mu\nu} | = 0 ;$$

il quadrato del modulo tra la massima e minima della equazione in σ *(ancora a radici tutte reali)*:

$$| a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu} | = 0.$$

b) Sia definita la forma intermedia B; un teorema affatto analogo si ha dalle (5) *a*) *c*) per le quantità $\frac{1}{p}$, $\frac{p}{r^2}$.

c) Due consecutive delle forme A, B, C, ad es.: B e C siano *parzialmente* definite rispetto a due gruppi di variabili complementari; cioè se la B è definita rispetto alle $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots x_{h_l}$, la C rispetto alle $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_m}$, tra le $x_{h_1} \ldots x_{h_l}$, $x_{k_1} \ldots x_{k_m}$ si trovino tutte le $x_1 x_2 \ldots x_n$; dalla (5 *a*) si ha allora:

Le radici complesse della (2), *non immaginarie pure, hanno la parte reale di un medesimo segno* $\left(\textit{quello di } \frac{-B}{C}\right)$.

Se inoltre, nella stessa ipotesi è $p = 0$, cioè si ha una radice della equazione (2), immaginaria pura, deve essere per essa $B(x^{(1)}, \overline{x}^{(1)}) = 0$; e quindi $x_{h_1} = x_{h_2} = \cdots = x_{h_l} = 0$: una tale radice deve quindi (cf. la nota al n.° 2) annullare la matrice che si ha dalla (2) sopprimendovi le righe (o le colonne) $h_1, h_2, \ldots h_l$. Ne segue che la (2) può esser liberata, con procedimenti razionali, dalle sue radici immaginarie pure; e per l'equazione così ottenuta varrà allora il teorema superiore per qualsiasi radice complessa..

Ancora nelle stesse ipotesi, dalle (6′) ed (8) si ha:

Una radice reale e multipla della equazione (2) *o ha il segno di* $\frac{-B}{C}$ *o rende il determinante* $E(\omega)$ *di caratteristica minore di* $n - 1$.

Se la B *e* C *hanno ugual segno (segno contrario) e si indica con* ε *l'unità positiva o negativa, secondochè il segno di* B *è positivo o negativo, posto*:

$$\mathbf{E}_{i_1 \ldots i_k}(\omega) = \varepsilon^k . E_{i_1 \ldots i_k}(\omega) \tag{9}$$

la successione

$$\mathbf{E}(\omega),\ \mathbf{E}_{i_1}(\omega),\ \mathbf{E}_{i_1 i_2}(\omega), \ldots\ \mathbf{E}_{i_1 \ldots i_n}(\omega) \tag{10}$$

è una successione di Sturm *per le radici reali e positive (negative) della equazione* (2).

Ne segue in particolare che il loro numero non può superare n.

d) Le forme estreme A e C sian parzialmente definite e di segno contrario rispetto a due gruppi complementari di variabili: la (5 b) non può allora aver luogo se non per $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, il che è assurdo. Allo stesso risultato si perviene quando le A e C, ancora parzialmente definite e di segno contrario, possono ridursi con una *stessa* sostituzione lineare sulle x (e la complessa coniugata sulle y) a contenere le stesse variabili $x_1 x_2 \dots x_k$ e rispetto a *tutte* queste l'una o l'altra delle due forme A e C sia (totalmente) definita.

Supponiamo infatti, come evidentemente si può, eseguita una tale riduzione; per la (5 b) una radice complessa (e quindi *non nulla*) della equazione (2) dovrebbe dare $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \cdots = x_k^{(1)} = 0$, e quindi annullare la matrice delle ultime $n - k$ righe (o colonne) del determinante $E(\omega)$: ma questa matrice, a meno del fattore ω^{n-k} è indipendente da ω ed il suo annullarsi porterebbe di necessità l'annullarsi *identico* del determinante $E(\omega)$, il che naturalmente escludiamo. Adunque:

Se le due forme estreme A e C sono parzialmente definite e di segno contrario rispetto a due gruppi complementari delle variabili $x_1 \dots x_n$ oppure (ancora non indefinite e di segno contrario) son riducibili a contenere le stesse k variabili, l'equazione (2) *ha tutte le radici reali.*

e) Sian soddisfatte le condizioni antecedenti, e di più la forma intermedia B sia anche essa definita totalmente o parzialmente. I risultati che precedono possono allora precisarsi ancora di più. Da c) segue allora infatti che la successione (11) è in questo caso una successione di Sturm per le radici positive $\left(\text{o negative, secondo il segno di } \frac{B}{C}\right)$ della equazione (2); ma cambiando ω in $\frac{1}{\omega}$, poichè le C ed A hanno per ipotesi segno contrario, una successione del tutto analoga può costruirsi per le sue radici negative (positive). Adunque:

Nelle ipotesi precedenti, se anche la B è definita, l'equazione (2) *ha tutte le radici reali ed n positive ed n negative. — È inoltre possibile costruire dai minori principali del determinante $E(\omega)$ due successioni di* Sturm, *l'una per le radici positive, l'altra per le negative della equazione stessa.*

f) Le forme estreme A e C siano ancora di Hermite e di prima specie, la B sia invece di seconda specie; ponendo $\omega = i\theta$, la B si cambia in una forma iB di prima specie, la C in $-C$. Ne segue in particolare (cf. d):

Se le forme estreme A e C sono parzialmente definite (nelle ipotesi ...) *ed hanno ugual segno, la B è invece una forma di seconda specie, l'equazione* (2) *ha tutte radici immaginarie pure.*

Se in particolare le A, B, C hanno coefficienti reali e quindi è $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$, $b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = 0$, la equazione (2) ha i coefficienti reali: ponendovi quindi

$$\omega^2 = -u,$$

si ha da essa *un'equazione $H(u) = 0$ che ha radici tutte reali e positive.* In questo caso inoltre ogni minore principale è una funzione razionale intera in u, e tale è ancora, e sempre positiva per u reale e positivo, il prodotto di due qualsiasi minori coniugati; ne segue (cf. n.° 17) che la successione (10) (fattovi $\omega^2 = -u$) costituisce per l'equazione $H(u) = 0$ quella che si dice una *successione generalizzata di* Sturm.

21. A risultati degni di nota conducono ancora le considerazioni seguenti, per quanto affatto diverse da quelle che precedono.

Essendo ancora A, B, C tre forme di Hermite di prima specie, si supponga la C definita (totalmente), ma non si pongano altre limitazioni. Se allora $p + iq$ è una radice qualunque della equazione (2), potremo determinare n quantità $x_1, x_2, \ldots x_n$, non tutte nulle, tali che valgano le (3 a), cioè le equazioni:

$$\sum_1^n {}_\mu \{ a_{\mu\nu} + 2(p + iq) b_{\mu\nu} + (p + iq)^2 c_{\mu\nu} \} x_\mu = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n). \quad (11)$$

In queste equazioni cambiamo i in $-i$; esse diventano:

$$\sum_1^n {}_\nu (a_{\mu\nu} + 2(p - iq) b_{\mu\nu} + (p - iq)^2 c_{\mu\nu}) \bar{x}_\nu = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n). \quad (\overline{11})$$

Moltiplichiamo allora le (11) per $\bar{x}_\nu$ e sommiamo rispetto a ν da 1 ad n, moltiplichiamo la $(\overline{11})$ per x_μ e sommiamo rispetto a μ da 1 ad n; sommando e sottraendo i due resultati, abbiamo le due relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & A(x, \bar{x}) + 2p\,B(x, \bar{x}) + (p^2 - q^2)\,C(x, \bar{x}) = 0 \\ (b) & 2q\,\{ B(x, \bar{x}) + p\,C(x, \bar{x}) \} = 0. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Sia ora $q \neq 0$, cioè *si consideri una radice complessa della equazione* (2);

ne segue insieme:

$$p = \frac{-B}{C}; \qquad q^2 = \frac{AC - B^2}{C^2}. \tag{13}$$

La prima delle (13) non dà nulla di nuovo, non così la seconda; essa infatti è assurda quando per *qualunque* sistema di valori delle $x_1, x_2, \ldots x_n$ si abbia sempre:

$$AC - B^2 = A(x, \bar{x})\, C(x, \bar{x}) - |B(x, \bar{x})|^2 \leq 0. \tag{14}$$

Ne segue il teorema:

a) *Se le A, B, C sono forme di* Hermite, *l'ultima delle quali definita, che soddisfano alla condizione*

$$AC - B^2 \leq 0, \tag{14}$$

l'equazione $E(\omega) = 0$ ha tutte le radici reali.

Sia invece $q = 0$, cioè *si consideri una radice reale della equazione* (2), la prima delle (12) dà allora:

$$A + 2pB + p^2 C = 0$$

risultato assurdo, quando sia $B^2 - AC < 0$, per *tutti* i possibili valori delle $x_1 \ldots x_n$. Adunque:

b) *Se nelle ipotesi superiori, si ha invece:*

$$AC - B^2 > 0, \tag{15}$$

l'equazione $E(\omega) = 0$ non ha radici reali.

In ogni caso poi le (13) dimostrano che:

c) *La parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una qualunque radice della* (2) *possono sempre limitarsi.*

Dal teorema *a*), segue come caso particolare quello del n.° 20 *d*). Più generalmente si osservi che la disuguaglianza (14), (la (15)) varrà certamente quando la massima (minima) radice della equazione $|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0$ sia inferiore od uguale (maggiore) del quadrato della minima (massima) radice dell'altra equazione $|b_{\mu\nu} - \psi c_{\mu\nu}| = 0$.

VII.

22. Volendo trattare di un sistema di due equazioni con due incognite, consideriamo due reti proiettive di forme bilineari in $2n$ e $2m$ variabili rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & \xi A + \eta B + \zeta C = \sum_1^n{}_{\mu\nu} (\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}) x_\mu y_\nu \\ & \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \\ (b) & \xi D + \eta E + \zeta F = \sum_1^n{}_{rs} (\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}) u_r v_s \\ & \qquad (r, s = 1, 2, \ldots m) \end{array}\right\} \quad (1)$$

corrispondendosi nelle due reti due forme con uguali (proporzionali) valori delle ξ, η, ζ. Due forme corrispondenti saranno ambedue *specializzate*, quando le ξ, η, ζ soddisfino insieme alle due equazioni (che in generale avranno i gradi n ed m):

$$\left.\begin{array}{ll} g(\xi, \eta, \zeta) = | a_{\mu\nu} \xi + b_{\mu\nu} \eta + c_{\mu\nu} \zeta | = 0 & (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \\ h(\xi, \eta, \zeta) = | d_{rs} \xi + e_{rs} \eta + f_{rs} \zeta | = 0 & (r, s = 1, 2, \ldots m). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Sia $\omega_\alpha \equiv (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$ una radice del sistema di equazioni (2): ciascuno dei quattro sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite $x^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$, $u^{(\alpha)}$, $v^{(\alpha)}$ rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{lll} (a) & \sum_1^n{}_\mu (a_{\mu\nu} \xi_\alpha + b_{\mu\nu} \eta_\alpha + c_{\mu\nu} \zeta_\alpha) x_\mu^{(\alpha)} = 0, & (\nu = 1, 2, \ldots n) \\ (b) & \sum_1^n{}_\nu (a_{\mu\nu} \xi_\alpha + b_{\mu\nu} \eta_\alpha + c_{\mu\nu} \zeta_\alpha) y_\nu^{(\alpha)} = 0, & (\mu = 1, 2, \ldots n) \\ (c) & \sum_1^m{}_r (d_{rs} \xi_\alpha + e_{rs} \eta_\alpha + f_{rs} \zeta_\alpha) u_r^{(\alpha)} = 0, & (s = 1, 2, \ldots m) \\ (d) & \sum_1^m{}_s (d_{rs} \xi_\alpha + e_{rs} \eta_\alpha + f_{rs} \zeta_\alpha) v_s^{(\alpha)} = 0, & (r = 1, 2, \ldots m) \end{array}\right\} \quad (3)$$

ammette allora delle *soluzioni non identicamente nulle.*

Se $\omega_\beta \equiv (\xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta)$ è ancora una radice del sistema (2), procedendo

come al n.° 4, si hanno le due relazioni

$$\begin{cases} (\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu^{(\alpha)} y_\nu^{(\beta)} + (\xi_\alpha \zeta_\beta - \xi_\beta \zeta_\alpha) \Sigma_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x_\mu^{(\alpha)} y_\nu^{(\beta)} = 0, \\ \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \\ (\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \Sigma_{rs} e_{rs} u_r^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} + (\xi_\alpha \zeta_\beta - \xi_\beta \zeta_\alpha) \Sigma_{rs} f_{rs} u_r^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} = 0, \\ \qquad (r, s = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

e quindi, *se le due radici* ω_α *ed* ω_β *sono diverse*, cioè se i due determinanti:

$$\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha \qquad \xi_\alpha \zeta_\beta - \xi_\beta \zeta_\alpha$$

non sono tutti due uguali allo zero, *deve aversi la relazione fondamentale:*

$$B(x^{(\alpha)} y^{(\beta)}) F(u^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) - C(x^{(\alpha)} y^{(\beta)}) E(u^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) = 0. \tag{4}$$

23. Supponiamo ora che le sei forme date sian tutte di **Hermite** e di prima specie, (ugualmente sarebbe ove fosser *tutte* di seconda): le equazioni (2) hanno allora i coefficienti reali e quindi le loro radici complesse sono a coppia coniugate. Siano allora $\omega_1 \equiv (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $\omega_2 \equiv (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ due tali radici complesse coniugate: dalle (3), fattovi successivamente $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, si ha subito che *può* prendersi:

$$\left.\begin{matrix} \bar{x}_\mu^{(2)} = y_\mu^{(1)}; \quad y_\mu^{(2)} = \bar{x}_\mu^{(1)}; \quad u_r^{(2)} = \bar{v}_r^{(1)}; \quad v_r^{(2)} = \bar{u}_r^{(1)} \\ (\mu = 1, 2, \ldots n; \quad r = 1, 2, \ldots m); \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

ponendo quindi nella (4) $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e sostituendo i valori precedenti, si ha:

$$B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) F(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)}) - C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) E(u^{(1)} \bar{u}^{(1)}) = 0. \tag{6}$$

Supponiamo ora che due forme corrispondenti, ad es.: la B e la E, sian definite e scriviamo la (6) al modo seguente:

$$\frac{F(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})}{E(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})} = \frac{C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})}{B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})}; \tag{6'}$$

se invece vi sono due forme dei due sistemi definite, ma non corrispondenti, ad es.: la B e la F, scriviamo invece la (6) sotto la forma:

$$\frac{C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})}{B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})} \cdot \frac{E(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})}{F(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})} = 1. \tag{6''}$$

Consideriamo ora le due equazioni (a radici tutte reali):

$$\left.\begin{matrix} (a) \quad |c_{\mu\nu} + \sigma b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \\ (b) \quad |f_{rs} + \tau e_{rs}| = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots m). \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

Se l'intervallo compreso tra la massima e minima radice della (7 *a*) è completamente esterno all'analogo intervallo per la (7 *b*), la (6′), la (6″) e quindi la (6) non possono mai aver luogo, anche quando in essa le x e le u si prendano affatto arbitrariamente, purchè (le une e le altre) non tutte nulle. In questa ipotesi deve esser dunque necessariamente:

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0; \qquad \xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1 = 0. \tag{8}$$

In particolare questo accadrà, *quando tutte quattro le forme B, C, E, F, sian definite e tre abbiano un segno, una il segno contrario:* in tal caso infatti le radici di una delle (7) son tutte positive, quelle dell'altra tutte negative, il che evidentemente soddisfa le condizioni superiori (*).

Poniamo ora:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi' + i\xi''; & \eta_1 &= \eta' + i\eta''; & \zeta_1 &= \zeta' + i\zeta''; \\ \xi_2 &= \xi' - i\xi''; & \eta_2 &= \eta' - i\eta''; & \zeta_2 &= \zeta' - i\zeta''; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dalle (8) si ottiene:

$$\xi' \eta'' - \xi'' \eta' = 0; \qquad \xi' \zeta'' - \xi'' \zeta' = 0. \tag{10}$$

Facciamo in queste successivamente:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \xi' = 1,\ \xi'' = 0; \text{ ne segue } \eta'' = \zeta'' = 0, \text{ e ponendo } \eta = \omega,\ \zeta = \theta, \\ &b)\ \eta' = 1,\ \eta'' = 0; \quad \text{»} \quad \xi'' = 0,\ \xi'\zeta'' = 0, \quad \text{»} \quad \xi = \omega,\ \zeta = \theta, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

otteniamo i due teoremi:

Se le forme A, B, C, D, E, F sono forme di Hermite *di prima specie, le prime tre nelle* $2n$ *variabili* $x, \bar{x}$, *le altre nelle* $2m$ $u, \bar{u}$; *se due tra esse forme, ad es.: la B e la E, (la B e la F) sono definite; se sono infine soddisfatte le condizioni relative alle equazioni* (7 *a*), (7 *b*):

a) *Il sistema di due equazioni dei gradi n ed m:*

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\omega\,\theta) &= |\, a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}\,\omega + c_{\mu\nu}\,\theta \,| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \\ \psi(\omega\,\theta) &= |\, d_{rs} + e_{rs}\,\omega + f_{rs}\,\theta \,| = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots m) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

nelle due incognite ω, θ *ha tutte le radici reali.*

(*) La relazione (6) porta ancora di necessità l'annullarsi di tutte le x, o di tutte le u, quando una di esse quattro forme, ad es.: la C, sia identicamente nulla e le due B, F sian *definite*; ma come subito si riconosce, non si ottiene così niente di essenzialmente nuovo.

b) *Indicando con* $(\omega,\ \theta)$ *una soluzione del sistema:*

$$\left.\begin{array}{ll}\chi(\omega,\ \theta)=|a_{\mu\nu}\omega+b_{\mu\nu}+c_{\mu\nu}\theta|=0 & (\mu,\ \nu=1,\ 2,\dots\ n)\\ \sigma(\omega,\ \theta)=|d_{rs}\omega+e_{rs}+f_{rs}\theta|=0 & (r,\ s=1,\ 2,\dots\ m)\end{array}\right\} \qquad (13)$$

la ω *è reale, ed ove non sia nulla, anche* θ *è reale.*

24. Le forme B, C; E, F siano ancora di Hermite e di prima specie; le A e D siano invece di seconda. Ci riduciamo al caso antecedente, cambiando ξ in $i\xi$, o ciò che fa lo stesso, η e ζ in $i\eta$, $i\zeta$.

Adunque:

Se le forme B, C, E, F *sono di* Hermite *e di prima specie, le* A *e* D *di seconda, e le* B, C, E, F *soddisfano alle condizioni del n.° 23, si ha:*

a) *Le due equazioni*

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\varphi}(\omega,\ \theta)=|a_{\mu\nu}+b_{\mu\nu}\omega+c_{\mu\nu}\theta|=0\\ \bar{\psi}(\omega,\ \theta)=|d_{rs}+e_{rs}\omega+f_{rs}\theta|=0\end{array}\right\} \qquad (14)$$

hanno tutte le radici immaginarie pure.

b) *Se* $(\omega,\ \theta)$ *è una soluzione del sistema:*

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\chi}(\omega,\ \theta)=|a_{\mu\nu}\omega+b_{\mu\nu}+e_{\mu\nu}\theta|=0\\ \bar{\sigma}(\omega,\ \theta)=|d_{rs}\omega+e_{rs}+f_{rs}\theta|=0,\end{array}\right\} \qquad (15)$$

la ω *è un immaginario puro; ed ove non sia nulla,* θ *è reale.*

Ancor più particolarmente supponiamo che le sei forme date abbian coefficienti reali, e quindi le A e D siano emisimmetriche, le B, C, E, F simmetriche; e sian sempre soddisfatte le condizioni del n.° 23.

Le equazioni (2) hanno allora i coefficienti reali e rimangono immutate cambiando ξ in $-\xi$ (o, ciò che è lo stesso, η e ζ in $-\eta$, $-\zeta$).

Poniamo allora:

$$\xi=1, \qquad \eta=\omega, \qquad \zeta=\omega\theta; \qquad (16)$$

cambiare il segno di η e ζ equivale a cambiare il segno di ω: ciascuna di esse equazioni contiene dunque le potenze pari di ω: posto dunque $\omega^2=-u$, e divisa eventualmente alcuna di esse equazioni per ω, si ottengono così due

equazioni:

$$G(u,\ \theta)=0, \qquad H(u,\ \theta)=0, \tag{17}$$

tali che, a causa delle (16) e del teorema che precede, in *qualunque loro soluzione* $(u,\ \theta)$, *u e θ sono reali ed inoltre u è positivo.*

Oppure poniamo:

$$\xi=\omega, \qquad \eta=1, \qquad \zeta=\theta \tag{18}$$

e facciamo ancora $\omega^2=-u$; si otterranno due equazioni:

$$M(u\,\theta)=0, \qquad N(u\,\theta)=0 \tag{19}$$

tali che in *una loro soluzione* $(u\,\theta)$ *u è reale e non negativo e, ove u sia diverso da zero, θ è reale.*

Pisa, Dicembre del 1902.

Sui numeri composti P, che verificano la congruenza di Fermat

$$a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}.$$

(*Di* Michele Cipolla, *a Palermo.*)

> Il ne faut pas toujours se hâter de conclure par induction dans l'étude des propriétés des nombres.
>
> E. Lucas.

In uno scritto cinese del tempo di Confucio (VI-V sec. a. C.) si legge che *il numero* $2^p - 2$ *è divisibile per* p, *se* p *è primo*, *e soltanto quando* p *è primo* (*).

La prima parte di questa proposizione è il teorema di Fermat nel caso particolare di una base eguale a 2, la seconda è stata riconosciuta falsa.

Già fin dal 1876 il Lucas (**) aveva fatto osservare che non sussiste il reciproco del teorema di Fermat, notando che il numero composto $2701 = 37 . 73$ verifica la congruenza $2^{2700} \equiv 1 \pmod{2701}$.

La questione fu risollevata nel 1898 dal Tarry nell'*Intermédiaire des Mathématiciens* (***) e in risposta furono segnalati dal Franel i numeri $2047 = 23 . 89$, 2701, e dal Korselt il numero $645 = 3 . 5 . 43$, i quali verificano tutti il teorema di Fermat alla base 2.

Appartiene allo stesso anno una Nota del sig. I.-H. Jeans (****), nella

(*) Rouse Ball, *Recréations et problèmes mathématiques*, trad. par I. Fitz-Patrick, (Hermann, 3.ª ed., 1898, pag. 53).

(**) Congrès de Clermont-Ferrand, 1876.

(***) V. (1898), pag. 266, (1401); VI (1899), pag. 142-4.

(****) Jeans, *The converse of Fermat's theorem*, (Messenger of Math., XXVII, pagina 174).

quale si accenna ad un metodo per trovare le soluzioni della congruenza

$$2^{P-1} - 1 \equiv 0 \pmod{P}, \tag{1}$$

quando P non è primo. L'Autore non entra nei dettagli del suo metodo; dobbiamo però osservare che parecchie soluzioni sfuggono alla sua investigazione. Così le soluzioni della (1) inferiori a 1000 non sono soltanto le due $341 = 11 . 31$, $645 = 3 . 5 . 43$; ma a queste bisogna aggiungere una terza: $561 = 3 . 11 . 17$; e alle altre soluzioni dell'Autore costituite da 2 fattori primi di cui uno non superiore a 31, cioè

$$1387 = 19 . 73, \quad 4369 = 17 . 257, \quad 4681 = 31 . 151, \quad 10261 = 31 . 331$$

bisogna aggiungere i numeri

$$2047 = 23 . 89, \quad 3277 = 29 . 113, \quad 15709 = 23 . 683.$$

Noi otterremo queste soluzioni con un metodo che può applicarsi in generale alla ricerca dei numeri composti P, che verificano la congruenza di Fermat:

$$a^{P-1} - 1 \equiv 0 \pmod{P} \tag{2}$$

ad una base a qualunque, risultando inoltre dalle nostre considerazioni l'esistenza di *infiniti* numeri composti che verificano la (2) ad una base a prestabilita.

Noi risolveremo ancora il problema di ricercare le basi alle quali un dato numero P composto verifica la congruenza di Fermat, e dimostreremo che se P è un numero dispari diverso da una potenza di 3, esistono *sempre* basi a diverse da 1 e -1, per le quali ha luogo la (2), dando i criterî per riconoscere, se P è un numero pari, se la congruenza (2) è possibile con basi a diverse da 1, e nel caso che lo sia, per trovarne le radici.

Questi risultati confermano innanzi tutto che il verificarsi della congruenza (2) non è una condizione sufficiente per asserire che il numero P è primo, e che per conseguenza il teorema di Fermat non può servire in generale alla ricerca dei numeri primi.

In casi assai speciali, ove si assegnino particolarissime condizioni alla forma del numero P può l'applicazione del teorema di Fermat, ad una base convenientemente scelta, fornire un risultato non dubbio sulla natura del numero P. È così per es., che in conseguenza del teorema del Lucas (*):

(*) Congrès de Clermont-Ferrand, 1876; v. anche Lucas, *Théorie des Nombres.*

Se a è primo con P ed è

$$a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$$

senza che sia

$$a^d \equiv 1 \pmod{P}$$

per un divisore d qualunque di $P-1$, *il numero P è primo*,

si ottengono i seguenti teoremi:

Se p è un numero primo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $2p+1$ *sia primo è che sia*

$$2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1};$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $4p+1$ *sia primo è che sia*

$$2^{4p} \equiv 1 \pmod{4p+1};$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $6p+1$ *sia primo è che sia*

$$2^{6p} \equiv 1 \pmod{6p+1};$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $10p+1$ *sia primo è che sia*

$$2^{10p} \equiv 1 \pmod{10p+1};$$

etc. E in quest'ordine d'idee può farsi rientrare ancora il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $2^{2^n}+1$ *sia primo è che sia*

$$3^{2^{2^n-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{2^{2^n}+1}$$

(LUCAS, PROTH) (*) e i teoremi analoghi del P. PÉPIN (**), che si ottengono da questo sostituendo alla base 3, il numero 5 e il numero 10.

Come vedesi, sono criteri, nei quali non soltanto la forma del numero P, ma anche la scelta della base è specialissima. Un criterio generale per tutti

(*) *Nouvelle Corresp. de Math.*, 1878, t. 4, pag. 210; *Comptes Rendus*, t. 87, 1878, pag. 374. Il teorema trovasi anche enunciato nella prefazione alla *Théorie des Nombres* di E. LUCAS, ma un errore di stampa lo ha messo in contraddizione col teorema di FERMAT.

(**) PÉPIN, *Sur la formule* $2^{2^n}+1$, Comptes Rendus, 1877, 2.° sem. pag. 329.

i numeri P, per una base data, non potrà mai stabilirsi. E così il sig. Girolamo Levi in una Nota comparsa negli *Atti dell'Istituto Veneto* (*) erroneamente opina che si possa riconoscere se numero P sia primo o composto soltanto dal decidere se il numero $10^{P-1} - 1$ è divisibile o no per P. L'Autore invero mette innanzi l'opinione che dice confortata da un numero grandissimo di prove fatte che « le sole eccezioni al teorema reciproco si possano trovare nei numeri composti di tutti 3, di tutti 9, di tutti 11, o di tutti 7, o in quelli composti di un numero dispari di 1 », e che se vi fossero altri numeri non primi verificanti il teorema reciproco, « sarebbero facilmente riconoscibili per non primi, e quindi inutile sarebbe tentare la prova su di essi ».

Ma fra i numeri composti, che verificano il teorema di Fermat, alla base 10, possiamo citare i numeri

$$91,\ 259,\ 451,\ 481,\ 703,\ 7981,\ 12883,\ 2463661, \text{ ecc.},$$

per taluni dei quali i metodi attualmente conosciuti di decomposizione in fattori primi, sarebbero, se non insufficienti, assai penosi.

Recentemente (**) il sig. Jolivald, osservando che il numero composto 2047 pur verificando la congruenza di Fermat a base 2 non la verifica a base 3, sollevava la questione di ricercare se mai esistessero numeri composti P pei quali $2^P - 2$, e $3^P - 3$ potessero essere entrambi divisibili per P, e in generale se ciò potesse accadere per i numeri $m^P - m$, $n^P - n$.

Risulterà dalle nostre considerazioni che esistono sempre numeri P pei quali ciò avvenga; p. es. i numeri

$$2701 = 37 \,.\, 73, \quad 59241 = 157 \,.\, 313$$

verificano il teorema di Fermat a base 2 e 3.

Dimodochè anche questo metodo, vagheggiato dal sig. Jolivald, non è atto ad assicurarci sempre se un dato numero sia primo o composto.

Noi crediamo che il teorema di Fermat sia stato considerato sotto un falso punto di vista, dal quale più non costituisce una proprietà caratteristica dei numeri primi. In verità la parte essenziale del teorema di Fermat consiste in ciò che la congruenza

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ha luogo per *tutti* i numeri a inferiori a p. Questa è una proprietà che ca-

(*) s. 7.ª, t. IV (1892-3), pp. 1816-42.

(**) *Intermédiaire des Math.*, t. IX, 1902, pag. 258 [2428].

ratterizza i numeri primi, e perciò questa sola è atta a fornire un criterio (poco pratico del resto) per riconoscere se un numero è o no primo.

Nel senso da noi dichiarato, il teorema di FERMAT ammette la reciproca, ed è grazie a questa proprietà e alla sua forma speciale che tiene il predominio in tutta la teoria delle congruenze.

§ I.

DEL GAUSSIANO.

È noto che se a è primo con P, la congruenza

$$a^x \equiv 1 \pmod{P}$$

è sempre possibile, e se α è il più piccolo fra i numeri che la soddisfano, tutte le altre soluzioni sono multiple di α. Si suol dire che a appartiene all'esponente $\alpha \pmod{P}$; noi diremo anche, modificando una denominazione introdotta dal LUCAS, che α è il *gaussiano* di P alla base a, scriveremo

$$\operatorname*{gss}_a P = \alpha.$$

Per procedere allo studio dei numeri composti, che verificano la congruenza di FERMAT, ci è necessario premettere alcuni teoremi sul gaussiano.

1. Teor. 1.° *Se p è un numero primo dispari, e*

$$\operatorname*{gss}_a p = \alpha,$$

e inoltre p^n è la più alta potenza di p che divide

$$a^\alpha - 1,$$

allora si ha

$$\operatorname*{gss}_a p^m = \begin{cases} \alpha, \text{ se } m \leq n \\ \alpha\, p^{m-n}, \text{ se } m > n. \end{cases}$$

Se $m \leq n$, è evidente che

$$\operatorname*{gss}_a p^m = \alpha.$$

Se $m > n$, dall'identità

$$a^{\alpha p^\nu} - 1 = \sum_{k=0}^{\frac{p^\nu-1}{2}} p^\nu \frac{1}{k} \binom{p^\nu - k - 1}{k - 1} a^{\alpha k} (a^\alpha - 1)^{p^\nu - 2k}$$

si deduce subito che $a^{\alpha p^\nu} - 1$ è divisibile per $p^{n+\nu}$ e non per una potenza superiore. Dunque

$$\operatorname*{gss}_a p^{n+\nu} = \alpha\, p^\nu.$$

2. Il gaussiano di una potenza di 2 alla base a (dispari), si può subito assegnare, perchè esso dipende esclusivamente dalla parità di $a-1$ e $a+1$. Si hanno a tal uopo i teoremi seguenti:

Teor. 2.° *Se* $a-1$ *è il doppio di un numero dispari e* 2^n *la più alta potenza di 2 che divide* $a+1$ (e però $n > 1$), si ha

$$\operatorname*{gss}_a 2 = 1$$

$$\operatorname*{gss}_a 2^m = \begin{cases} 1, \text{ se } m \leq n \\ 2^{m-n}, \text{ se } m > n. \end{cases}$$

Teor. 3.° *Se* $a+1$ *è il doppio di un numero dispari e* 2^n *la più alta potenza di 2 che divide* $a-1$ (e però $n < 1$), si ha

$$\operatorname*{gss}_a 2^m = \begin{cases} 1, \text{ se } m \leq n \\ 2^{m-n}, \text{ se } m > n. \end{cases}$$

Questi teoremi si dimostrano facilmente.

Poichè in entrambi i casi è $n > 1$, si ha che il gaussiano di 2^m, per $m > 2$, non supera mai $\frac{1}{2}\varphi(2^m) = 2^{m-2}$, ed è uguale a 2^{m-2} nel caso che $a+1$, ovvero $a-1$ sia il quadruplo di un numero dispari.

3. Indichiamo con $M(u, v, w, \ldots, z)$ il minimo comune multiplo dei numeri $u, v, w, \ldots, z$. La ricerca del gaussiano di un numero composto è fondata sul seguente teorema:

Teor. 4.° *Se* $m, n, \ldots, r$ *sono numeri primi fra loro a due a due, si ha*

$$\operatorname*{gss}_a (m n \ldots r) = M(\operatorname*{gss}_a m, \operatorname*{gss}_a n, \ldots, \operatorname*{gss}_a r).$$

Infatti, è chiaro che si ha

$$a^M \equiv 1 \quad (\text{mod. } m), (\text{mod. } n), \ldots, (\text{mod. } r)$$

e poichè i moduli sono primi fra loro a due a due:

$$a^M \equiv 1 \quad (\text{mod. } m\, n \ldots r).$$

E il gaussiano di $m\, n \ldots r$ dovendo dividere M ed essere multiplo dei gaussiani m, $n, \ldots, r$, e quindi del loro minimo comune multiplo M, è proprio M.

Noi diremo che *un numero a, non divisibile per il numero primo p, è radice d'ordine ν di p, se essendo α il gaussiano di p a base a, p^ν è la più alta potenza di p che divide $a^\alpha - 1$.*

Indichiamo ora con $\varepsilon(x)$ una funzione numerica che sia eguale a zero per $x \leqq 0$, e uguale a x per $x > 0$.

Sia inoltre a primo col numero

$$P = 2^m p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$$

e α_i sia il gaussiano di p_i alla base a, radice n_i.^{esima} di p_i. Allora il gaussiano di P, alla base a, è (teor. 1.°, 4.°):

$$M(\underset{a}{\text{gss}}\, 2^m,\ \alpha_1 p_1^{\varepsilon(m_1-n_1)},\ \alpha_2 p_2^{\varepsilon(m_2-n_2)}, \ldots,\ \alpha_k p_k^{\varepsilon(m_k-n_k)}).$$

4. Da ciò che precede risulta che la ricerca del gaussiano di un numero qualunque P alla base a (prima con P) è ricondotta alla ricerca dei gaussiani dei suoi fattori primi e alla determinazione dell'ordine di multiplicità della base a rispetto a questi fattori primi.

Ora il gaussiano di un numero primo si può ottenere facilmente quando si possiede una tavola di indici rispetto a questo numero primo, mediante il seguente

Teorema 5.° *Il gaussiano di un numero primo p alla base a è uguale al quoziente della divisione di $p-1$ per il massimo comun divisore di $p-1$ e l'indice di a* (mod p, *e base una radice primitiva qualunque di p*).

Infatti, se g è il gaussiano di p alla base a, sarà

$$a^g \equiv 1 \pmod{p},$$

inoltre se ϖ è una radice primitiva di p, è anche

$$\varpi^{\text{ind}a} \equiv a \pmod{p}$$

e innalzando alla potenza g^{ima}:

$$\varpi^{g\,\text{ind}a} \equiv 1 \pmod{p}$$

e però

$$g\,\text{ind}a \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Se ora δ è il mass. com. div. di $p-1$ e ind$a$, si deduce

$$g \equiv 0 \left(\bmod \frac{p-1}{\delta}\right)$$

e però anche

$$g = \frac{p-1}{\delta}.$$

§ 2.

Condizioni cui devono soddisfare i numeri a e P perchè possa aver luogo la congruenza $a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$.

5. Perchè la congruenza

$$a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$$

possa aver luogo occorre e basta che $P-1$ sia divisibile per il gaussiano di P alla base a, cioè per

$$M(\underset{a}{\text{gss}}\, 2^m,\ \alpha_1 p_1^{\varepsilon(m_1-n_1)},\ \alpha_2 p_2^{\varepsilon(m_2-n_2)}, \ldots,\ \alpha_k p_k^{\varepsilon(m_k-n_k)})$$

e perchè ciò avvenga, è necessario che sia

$$\underset{a}{\text{gss}}\, 2^m = 1, \quad \varepsilon(m_i - n_i) = 0, \quad \text{cioè} \quad m_i \leqq n_i.$$

Le condizioni dunque cui devono soddisfare a e P, perchè la congruenza superiore abbia luogo sono:

1.° il numero a rispetto a ogni fattore primo p dispari di P deve essere radice d'un ordine non inferiore al grado secondo cui p è contenuto in P;

2.° se P e pari e 2^m è la più alta potenza di 2 che divide P, deve essere

$$a \equiv 1 \pmod{2^m};$$

3.° $P-1$ deve dividere

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k).$$

6. L'esistenza di un numero a, che fosse radice semplice di tutti i numeri primi ridurrebbe assai queste condizioni. Nel 1876 il Proth comunicò all'Accademia delle scienze di Parigi (*) la seguente proposizione:

Se p è un numero primo dispari, il numero $2^{p-1} - 1$ è divisibile per p, ma non per p^2, nè per p^3.

Ma l'Autore probabilmente non possedette mai una dimostrazione esatta di questa proprietà, che fu oggetto di osservazioni critiche da parte del Lucas (**). Queste osservazioni del Lucas non furono pubblicate, ma a noi sembra di averne trovato qualche traccia nella sua *Théorie des Nombres*, a proposito del teorema di Fermat (pag. 423). Egli dice che avviene ma raramente che $x^{p-1} - 1$ sia divisibile per p^2, così $3^{10} - 1$ è divisibile per 11^2. Per $a = 10$ il numero $10^2 - 1$ è divisibile per 3^2 e si è verificato che per $a = 10$ e p primo < 1000 non esiste che un solo altro valore di p tale che si abbia $10^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$, cioè $p = 487 = 2 . 3^5 + 1$. E conclude: *ceci montre qu'il ne faut pas toujours se hâter de conclure par induction dans l'étude des propriétés des nombres.*

Nel medesimo luogo il Lucas dimostra che $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ non è un quadrato che per $p = 2, 3$, e quindi chiede se esista un numero primo p tale che $2^{p-1} - 1$ sia divisibile per p^2.

La questione risollevata da recente nell'*Intermédiaire*, non è stata ancora risoluta. Se la dimostrazione di Proth fosse vera, si dedurrebbero subito queste altre:

1.° Se $2^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, P sarebbe primo o costituito da fattori primi tutti diversi.

2.° Un numero di Gauss $2^{2^n} + 1$ o sarebbe primo o costituito da fattori primi tutti diversi.

3.° Un numero di Mersenne $2^p - 1$ (p primo) sarebbe primo o costituito da fattori primi tutti diversi.

(*) *Comptes Rendus*, v. 83 (1876).

(**) L'annunzio della critica del Lucas al teorema di Proth trovasi nei *Comptes Rendus* del 1877 (v. 84, pag. 92).

§ 3.

DATO UN NUMERO COMPOSTO $P = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$, PARI O DISPARI, TROVARE TUTTI I NUMERI a INCONGRUI (mod P), TALI CHE SI ABBIA $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$.

7. La risoluzione di questo problema è fondata sui seguenti teoremi.

Teor. 1.° *Se D_{p_r} è il mass. com. div. di $p_r - 1$ e $\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1$, i numeri a in questione sono tutte le soluzioni della congruenza*

$$x^M \equiv 1 \pmod{P}$$

essendo M il min. com. mult. dei numeri $D_{p_1}, D_{p_2}, \ldots, D_{p_k}$.

Infatti un numero a che verifica la congruenza

$$x^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$$

deve appartenere a un divisore di $p_r - 1$ rispetto al modulo $p_r^{m_r}$, in virtù della condizione 1.ª e 2.ª del n.° 5. Deve dunque aver luogo la congruenza

$$a^{p_r-1} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}$$

donde

$$a^{p_r^{m_r}-1} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}.$$

D'altra parte, essendo identicamente

$$P - 1 = (p_r^{m_r} - 1)\frac{P}{p_r^{m_r}} + \frac{P}{p_r^{m_r}} - 1$$

a deve altresì verificare la congruenza

$$a^{\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}$$

e quindi anche l'altra

$$a^{D_{p_r}} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}$$

per $r = 1, 2, \ldots, k$. Se M è il minimo comune multiplo dei numeri D_{p_1}, $D_{p_2}, \ldots, D_{p_k}$ deve essere anche

$$a^M \equiv 1 \pmod{p_1^{m_1}}, \pmod{p_2^{m_2}}, \ldots, \pmod{p_k^{m_k}}$$

e quindi

$$a^M \equiv 1 \pmod{P}.$$

Viceversa, se b verifica la congruenza

$$b^M \equiv 1 \pmod{P},$$

$P-1$, poichè è divisibile per $D_{p_1}, D_{p_2}, \ldots, D_{p_k}$, è anche divisibile per M, e però

$$b^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}.$$

Teorema 2.° *Esistono soltanto*

$$D_{p_1} D_{p_2} \ldots D_{p_k}$$

numeri a incongrui rispetto a P, tali che si abbia

$$a^{P-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

e sono i resti (mod P) *dei numeri*

$$u_{1i_1}\,\alpha_1 \frac{P}{p_1^{m_1}} + u_{2i_2}\,\alpha_2 \frac{P}{p_2^{m_2}} + \cdots + u_{ki_k}\,\alpha_k \frac{P}{p_k^{m_k}}$$

dove u_{ri_r} *è una radice della congruenza*

$$x^{D_{p_r}} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}$$

e α_r *la radice della congruenza*

$$x^{\frac{P}{p_r^{m_r}}} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}.$$

Non essendo M divisibile per p_r, la congruenza

$$x^M \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}$$

ha tante radici quante ne ha la congruenza

$$x^M \equiv 1 \pmod{p_r}.$$

Questa poi ha tante radici quante unità sono contenute nel mass. com. div. ω di M e p_r 1; ora dimostriamo che è

$$\omega = D_{p_r}.$$

Infatti tanto M che $p_r - 1$ sono divisibili per D_{p_r} e poichè D_{p_r} è il

mass. com. div. di $p_r - 1$ e $\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1$, i numeri

$$\frac{p_r - 1}{D_{p_r}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{D_{p_r}}\left(\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1\right)$$

sono primi fra loro. Dall'identità

$$P - 1 = (p_r^{m_r} - 1)\frac{P}{p_r^{m_r}} + \left(\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1\right)$$

deducesi

$$\frac{P-1}{M} \cdot \frac{M}{D_{p_r}} = \frac{p_r^{m_r} - 1}{D_{p_r}} \cdot \frac{P}{p_r^{m_r}} + \frac{1}{D_{p_r}}\left(\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1\right).$$

Ora se $\frac{M}{D_{p_r}}$ e $\frac{p_r - 1}{D_{p_r}}$ ammettessero un divisore comune, da questa eguaglianza risulterebbe che questo sarebbe anche divisore comune a

$$\frac{p_r - 1}{D_{p_r}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{D_{p_r}}\left(\frac{P}{p_r^{m_r}} - 1\right),$$

il che è assurdo; dunque $\frac{M}{D_{p_r}}$ e $\frac{p_r - 1}{D_{p_r}}$ sono primi fra loro, e quindi D_{p_r} è anche il mass. com. div. di M e $p_r - 1$.

Ne risulta che la congruenza $x^M \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}$ ha D_{p_r} radici incongrue le quali evidentemente sono le stesse di quelle della congruenza

$$x^{D_{p_r}} \equiv 1 \pmod{p_r^{m_r}}.$$

È poi manifesto che, se $u_{r i_r}$ è una qualunque di queste radici, i $D_{p_1} D_{p_2} \ldots D_{p_r}$ resti rispetto a P dei numeri

$$u_{1 i_1} \alpha_1 \frac{P}{p_1^{m_1}} + u_{2 i_2} \alpha_2 \frac{P}{p_2^{m_2}} + \cdots + u_{k i_k} \alpha_k \frac{P}{p_k^{m_k}}$$

sono tutte le radici della congruenza

$$x^M \equiv 1 \pmod{P}$$

e però anche della congruenza

$$x^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}.$$

Corollario. *Se $P = p\,q$ è il prodotto di due fattori primi diversi p e q, la congruenza $x^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ ammette D^2 radici che sono quelle della congruenza $x^D \equiv 1 \pmod{p\,q}$, essendo D il mass. com. div. di $p - 1$ e $q - 1$.*

Se P è un numero dispari, composto di un numero k di fattori primi diversi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, i numeri $D_{p_1}, D_{p_2}, \ldots, D_{p_k}$ sono pari e però la congruenza

$$x^{P-1} \equiv 1 \quad (\text{mod } P)$$

ammette almeno $2^k - 2$ radici diverse da 1 e -1.

Per $k > 1$ è $2^k - 2 > 0$, per $k = 1$ cioè nel caso in cui P sia la potenza di numero primo: $P = p^m$, la congruenza

$$x^{p^m - 1} \equiv 1 \quad (\text{mod } p^m)$$

ammette $p - 1$ radici, e perchè ammetta radici diverse da 1 e -1 occorre che sia $p - 1 > 2$, cioè $p \neq 3$.

Si ha dunque

Teor. 3.° *Esistono sempre basi diverse da* 1 *e* -1 *alle quali un numero composto dispari, che non sia una potenza di* 3, *verifica la congruenza di* Fermat.

Se P è pari, $D_{p_1}, D_{p_2}, \ldots, D_{p_k}$ sono tutti dispari e possono essere in particolare eguali all'unità.

Soltanto in questo caso P non può verificare la congruenza di Fermat con una base diversa da 1.

9. *Esempio 1.°* A quali basi il numero $3087 = 3^2 . 7^3$ verifica il teorema di Fermat?

Si ha $D_3 = 2$, $D_7 = 2$, $M = 2$.

Le congruenze $x^2 - 1 \equiv 0$ (mod 3^2), $x^2 - 1 \equiv 0$ (mod 7^3) ammettono entrambe le radici 1, -1. D'altra parte i valori di α_1, α_2, che verificano le congruenze

$$7^3 \alpha_1 \equiv 1 \ (\text{mod } 3^2), \qquad 3^2 \alpha_2 \equiv 1 \ (\text{mod } 7^3),$$

sono

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = 305.$$

E però le basi cercate sono:

$$\left.\begin{array}{r} 7^3 + 3^2 . 305 \equiv 1 \\ -7^3 + 3^2 . 305 \equiv 2402 \\ 7^3 - 3^2 . 305 \equiv -2402 \equiv 1405 \\ -7^3 - 3^2 . 305 \equiv -1 \end{array}\right\} (\text{mod } 3087).$$

Esempio 2.° Trovare le basi per il numero $154 = 2 . 7 . 11$.

Si ha $D_2 = 1$, $D_7 = 3$, $D_{11} = 1$. Le congruenze

$$x \equiv 1 \ (\text{mod } 2), \qquad x \equiv 1 \ (\text{mod } 11)$$

ammettono la sola radice 1. La congruenza $x^3 \equiv 1 \pmod{7}$ ha le radici 1, 2, 4. Le basi sono dunque date dalle somme

$$7 \,.\, 11\,\alpha_1 + 2 \,.\, 11\,\alpha_2 + 2 \,.\, 7\,\alpha_3$$
$$7 \,.\, 11\,\alpha_1 + 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 11\,\alpha_2 + 2 \,.\, 7\,\alpha_3$$
$$7 \,.\, 11\,\alpha_1 + 4 \,.\, 2 \,.\, 11\,\alpha_2 + 2 \,.\, 7\,\alpha_3$$

purchè si determinino α_1, α_2, α_3 in maniera che sia

$$7 \,.\, 11\,\alpha_1 \equiv 1 \pmod{2}, \quad 2 \,.\, 11\,\alpha_2 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 2 \,.\, 7\,\alpha_3 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Si ottiene

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 4,$$

e in conseguenza i numeri

$$1, \quad 23, \quad 67$$

che sono le basi richieste.

§ 4.

Dato il numero a, trovare tutti i numeri composti P, che verificano la congruenza $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$.

10. Il problema così posto è indeterminato, perchè dimostreremo al § 5 che esistono infiniti numeri composti P che verificano la congruenza di Fermat ad una base assegnata. Noi risolveremo pertanto un problema la cui applicazione sistematica conduce a trovare tutti i numeri composti in questione che non superano un limite assegnato.

Dato il numero a, e $k-1$ numeri primi diversi

$$p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$$

che non dividono a, trovare tutti i numeri P, che verificano la congruenza $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, e contengono oltre le potenze dei numeri primi dati, anche la potenza di un altro numero primo.

Perchè il numero $P = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_{k-1}^{m_{k-1}} p_k^{m_k}$ possa soddisfare alla congruenza $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, è necessario innanzi tutto che gli esponenti m_1,

$m_2, \ldots, m_k$ non superino gli ordini di multiplicità $n_1, n_2, \ldots, n_k$ di a rispetto ai fattori primi $p_1, p_2, \ldots p_k$, (n. 5). Inoltre p_k deve dividere

$$a^{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_{k-1}^{n_{k-1}} - 1} - 1.$$

Considereremo dunque tutti i numeri primi diversi p_k, che dividono il detto numero. Troveremo poi, oltre i gaussiani dei numeri $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$, i gaussiani dei numeri p_k; e quelli dei numeri

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k} - 1 \quad (m_i \leq n_i)$$

che dividono il min. com. mult. dei gaussiani di $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sono tutti i numeri P che si cercano (n. 5).

11. *Esempio.* Trovare i numeri composti di due fattori primi, uno dei quali sia 3, che verificano il teorema di Fermat a base 10.

Poichè $\underset{10}{\text{gss}}\, 3 = 1$, e $10 - 1 = 3^2$, dobbiamo decomporre $10^8 - 1$ in fattori primi. Si ha

$$10^8 - 1 = 3^2 . 11 . 101 . 73 . 137.$$

I numeri che si devono considerare sono

$$\begin{array}{llll} 3 \,.\, 11, & 3 \,.\, 73, & 3 \,.\, 101, & 3 \,.\, 137, \\ 3^2 . 11, & 3^2 . 73, & 3^2 . 101, & 3^2 . 137, \end{array}$$

dei quali soltanto i numeri

$$3 . 11, \quad 3^2 . 11, \quad 3^2 . 73, \quad 3^2 . 101, \quad 3^2 . 137$$

sono divisibili per il m. com. mult. dei gaussiani dei loro fattori primi, e però sono i numeri che si cercavano.

Si può usufruire della conoscenza dei gaussiani dei fattori primi di $10^8 - 1$, per comporre altre soluzioni.

Si ottengono così i numeri

$$73 . 137, \quad 3 . 11 . 73, \quad 3 . 11 . 101, \quad 3 . 11 . 137, \quad 3^2 . 37 . 173,$$
$$3 . 11 . 73 . 137$$

che verificano il teorema di Fermat a base 10.

12. Noi abbiamo applicato questo procedimento alla ricerca dei numeri P inferiori a 1000, che verificano la congruenza

$$2^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}.$$

Questa ricerca è semplificata dal fatto che non esiste numero primo p, il cui quadrato sia inferiore a 1000 e divida il numero $2^{p-1} - 1$. Quindi i numeri che si cercano non ammettono fattori quadratici.

Cominciando col cercare i numeri della forma pq $(p < q)$ basta fare percorrere a p la successione dei numeri primi da 3 a 31, e determinare quindi, nel modo esposto nei numeri precedenti, il numero q.

Non si trovano soluzioni per $p = 3, 5, 7, 13$; per $p = 11, 17, 19$ si hanno rispettivamente le soluzioni

$$P = 11 . 31 = 341, \quad P = 17 . 257 = 4369, \quad P = 19 . 73 = 1387.$$

Per $p = 23$ si hanno le soluzioni:

$$P = 23 . 89 = 2047, \quad P = 23 . 683 = 15709.$$

Per $p = 29$ si ha

$$P = 29 . 113 = 3277.$$

Per $p = 31$ si ottiene

$$P = 31 . 151 = 4681, \quad P = 31 . 331 = 10261.$$

Per $P = 37$ si trova la soluzione del Lucas

$$P = 37 . 73 = 2701$$

e l'altra

$$P = 37 . 109 = 4033.$$

Per ottenere i numeri $P < 1000$ di tre fattori primi $p, q, r, (p < q < r)$ basta assegnare a p valori primi che non superano 7, e a q valori primi non superiori a 17.

Per $p = 3$, $q = 5$ si trovano le soluzioni

$$P = 3 . 5 . 43 = 645, \quad P = 3 . 5 . 127 = 1905.$$

Per $p = 3$, $q = 7$ non si hanno soluzioni.

Per $p = 3$, $q = 11$ si trova:

$$P = 3 . 11 . 17 = 561, \quad P = 3 . 11 . 257 = 8481,$$

$$P = 3 . 11 . 65537 = 2162721$$

Ed è inutile spingerci oltre, perchè non si potranno più ottenere numeri $P < 1000$.

Dunque i numeri $P < 1000$, che verificano il teorema di Fermat a base 2,

sono tre:

$$341, \quad 561, \quad 641.$$

Al più piccolo corrisponde il numero di 103 cifre:

$$2^{340} - 1.$$

Noi crediamo con JEANS che appunto perciò la proposizione cinese, che abbiamo ricordata in principio, sia stata trovata per induzione.

Il metodo ci ha fatto trovare più di quanto volevamo; oltre le soluzioni notate, abbiamo incontrato durante la ricerca le seguenti altre:

$$89 . 683, \quad 151 . 331, \quad 73 . 109, \quad 43 . 127,$$
$$23 . 89 . 683, \quad 31 . 151 . 331, \quad 37 . 73 . 109.$$

§ 5.

SOLUZIONI DI FORMA PARTICOLARE.

13. È assai facile dimostrare l'esistenza di infiniti numeri composti P che verificano la congruenza di FERMAT ad una base assegnata a. Ciò deducesi subito dal seguente *Teorema. Se p è un numero primo dispari che non divide nè $a - 1$, nè $a + 1$, il numero*

$$\frac{a^{2p} - 1}{a^2 - 1}$$

e un suo divisore qualunque dispari verificano la congruenza di FERMAT *a base a.*

Ogni divisore dispari q di $\frac{a^p - 1}{a - 1}$ non può ammettere alla base a che il gaussiano 1 o p. Se ammettesse il gaussiano 1, si avrebbe

$$a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1 \equiv 0 \pmod{q}$$
$$a \equiv 1 \pmod{q}$$

e però

$$p \equiv 0 \pmod{q}$$

cioè $p = q$ e p dividerebbe $a - 1$ contro ipotesi. Dunque

$$q - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ed essendo $q - 1$ pari è anche

$$q - 1 \equiv 0 \pmod{2p}.$$

Analogamente il gaussiano di ogni divisore q' di $\dfrac{a^p + 1}{a + 1}$ è $2p$, quindi

$$q' - 1 \equiv 0 \pmod{2p}.$$

È però

$$q\,q' - 1 \equiv 0 \pmod{2p}.$$

D'altra parte

$$a^{2p} \equiv 1 \pmod{q\,q'}$$

e però anche

$$a^{qq'-1} \equiv 1 \pmod{q\,q'}.$$

Questo teorema ci permette di scrivere subito un gran numero di soluzioni della congruenza $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$.

In particolare i numeri

$$\frac{1}{3}(2^{2p} - 1)$$

$(p > 3)$ verificano il teorema di Fermat a base 2. Al numero $p = 2^{61} - 1$, che è il più grande numero primo attualmente conosciuto (Pervouchine, Seelhoff, Hudelot) corrisponde il numero

$$\frac{1}{3}(2^{2^{62}-2} - 1)$$

che ha più di un quintilione di cifre.

14. Altre soluzioni alla base 2 possono ottenersi colle seguenti considerazioni.

Osservando che

$$2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$$

si deduce che *se* $2^{2^n} + 1$ *è un numero primo, il numero* 2 *è radice semplice di esso e appartiene all'esponente* 2^{n+1}.

Ne segue che i numeri composti

$$P = (2^{2^m} + 1)^\mu (2^{2^n} + 1)^\nu \dots (2^{2^s} + 1)^\sigma,$$

se $2^{2^m} + 1$, $2^{2^n} + 1, \dots,$ $2^{2^s} + 1$ sono primi, non possono verificare la con-

gruenza

$$2^{P-1} \equiv 1 \pmod{P} \tag{1}$$

se almeno uno degli esponenti è maggiore dell'unità.

Se tutti gli esponenti sono eguali ad 1, si può subito stabilire il seguente Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente, perchè il numero*

$$P = (2^{2^m} + 1)(2^{2^n} + 1) \dots (2^{2^s} + 1)$$

soddisfi alla (1) *è che, supposto* $m > n > \cdots > s$, *sia*

$$2^s > m.$$

Infatti il gaussiano di P a base 2 è il min. com. mult. dei gaussiani dei suoi fattori, cioè, per l'ip. fatta, 2^{m+1}.

Perchè dunque sia soddisfatta la (1), occorre e basta che $P-1$ sia divisibile per 2^{m+1}. Ma è

$$P - 1 = (2^{2^m} + 1)(2^{2^n} + 1) \dots (2^{2^s} + 1) - 1 = 2^{2^m + 2^n + \dots + 2^s} + \cdots$$
$$\cdots 2^{2^m} + 2^{2^n} + \cdots + 2^{2^s} = 2^{2^s} Q,$$

Q essendo un numero dispari, quindi è necessario e sufficiente che 2^{2^s} divida 2^{m+1}, cioè sia $2^s > m$.

Così i numeri

$$(2^{2^3} + 1)(2^{2^2} + 1) = 257 \,.\, 17 = 4369$$
$$(2^{2^4} + 1)(2^{2^3} + 1) = 65537 \,.\, 257 = 16843009$$

verificano la (1).

15. Termineremo col dimostrare un teorema, il quale, oltre a fornire un gran numero di soluzioni alle basi 2, 3, 10, permette di risolvere una questione sollevata dal sig. Iolivald, e che noi abbiamo ricordato in principio.

Teorema. *Se* p *e* $2p - 1 = q$ *sono numeri primi, ed* a *è uno qualunque dei* $\frac{q-1}{2} = p - 1$ *residui quadratici di* q, *si ha*

$$a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Infatti, si ha

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

e però

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Ma $pq - 1 = (p-1)(q+2)$, dunque

$$a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Corollario 1.° *Se $p = 4n + 3$ e $q = 2p - 1$ sono numeri primi dispari si avrà sempre*

$$3^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Infatti, se $p = 4n + 3$, n non può avere la forma $3h$, e poichè

$$q = 2p - 1 = 8n + 5,$$

n non può avere la forma $3h + 2$, sarà dunque della forma $3h + 1$, e quindi q della forma $24h + 13$. Ma poichè

$$\left(\frac{3}{24h + 13}\right) = \left(\frac{24h + 13}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}\right) = 1$$

per il teor. precedente si ha

$$3^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Si ottengono così le seguenti soluzioni a base 3:

19 . 37	367 . 733	691 . 1381
31 . 61	379 . 757	727 . 1453
79 . 157	439 . 877	811 . 1621
199 . 397	499 . 997	967 . 1933
271 . 541	547 . 1093	1171 . 2341
307 . 613	607 . 1213	ecc.
331 . 661	619 . 1237	

Corollario 2.° *Se p è un numero primo della forma $4n + 1$ e $q = 2p - 1$ è primo, si avrà sempre*

$$2^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

Infatti q sarà della forma $8n + 1$, e però 2 residuo quadratico di esso. Si ottengono così le seguenti soluzioni a base 2

37 . 73	577 . 1153	937 . 1873
97 . 193	601 . 1201	997 . 1993
157 . 313	661 . 1321	1009 . 2017
229 . 457	829 . 1657	1069 . 2137
337 . 673	877 . 1753	ecc.

Corollario 3.° *Se p è un numero primo della forma* $20\,k+1$ *e* $q=2\,p-1$ *è un numero primo, si avrà*

$$10^{pq-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Poichè infatti $q=2\,p-1=40\,k+1$, si ha

$$\left(\frac{10}{q}\right)=\left(\frac{10}{40\,k+1}\right)=\left(\frac{2}{40\,k+1}\right)=\left(\frac{5}{40\,k+1}\right)=1.$$

Si trovano così le soluzioni a base 10:

$$601 \,.\, 1201 = 721801, \quad 661 \,.\, 1321 = 873181, \text{ ecc.}$$

Corollario 4.° *Se p è un numero primo della forma* $60\,m+7$ *e* $60\,m+19$, *e q è un numero primo, si ha*

$$10^{pq-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Infatti nel primo caso è q della forma $120\,m+13$ e si ha

$$\left(\frac{10}{q}\right)=\left(\frac{2}{120\,m+13}\right)\left(\frac{5}{120\,m+13}\right)=1.$$

Nel secondo caso q è della forma $120\,m+37$ e si ha

$$\left(\frac{10}{q}\right)=\left(\frac{10}{120\,m+37}\right)=1.$$

Si ottengono così le seguenti soluzioni a base 10:

307 . 613	19 . 37
367 . 733	79 . 157
547 . 1093	199 . 397
607 . 1213	379 . 757
727 . 1453	439 . 877
967 . 1933	499 . 997
ecc.	619 . 1237, ecc.

Corollario 5.° *Se* m *e* n *sono numeri qualunque e* $p=2\,m\,n\,k+1$ *e* $q=4\,m\,n\,k+1$ *sono numeri primi, hanno luogo le congruenze*

$$m^{pq-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}, \quad n^{pq-1} \equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Perchè si ha, tanto per m ed n pari o dispari,

$$\left(\frac{m}{4\,m\,n\,k+1}\right)=1,\quad \left(\frac{n}{4\,m\,n\,k+1}\right)=1.$$

Prendendo in particolare $m=2$, $n=3$, si deduce subito il seguente

Corollario 6.° *Se* $p=12\,k+1$, $q=24\,k+1$ *sono entrambi primi, si hanno le congruenze*

$$2^{pq-1}\equiv 1 \pmod{p\,q},\quad 3^{pq-1}-1\equiv 1 \pmod{p\,q}.$$

Questo corollario del resto è nient'altro che il corollario 2.°, e però i numeri là notati verificano le due congruenze superiori. Questi due ultimi teoremi risolvono la questione del sig. Jolivald, cui accennammo in principio alla Nota.

Palermo, 21 maggio 1903.

Sopra alcuni problemi di statica elastica.

(*Del Dott.* Edmondo Morandi, *a Pavia.*)

Oggetto di questo lavoro sono i problemi d'equilibrio elastico risolti ultimamente dal sig. C. Somigliana col suo metodo *per gruppi d'integrali* (*Sul principio delle immagini di lord* Kelvin *e le equazioni dell'elasticità*. Acc. Lincei, febbrajo 1902); quei casi, cioè, nei quali le condizioni superficiali note non sono tutte le: u, v, w o le: L, M, N ma parte delle une e parte delle altre, e i corpi che si considerano sono limitati da uno o più piani.

Avendo notato che, applicando il metodo suddetto alla deformazione del *suolo* e *del diedro retto* isotropi, e in assenza di forze di massa, venivano in modo naturale a comparire nelle espressioni di u, v, w le distanze dei punti della superficie dal punto in cui erano calcolati quegli spostamenti e dalle *immagini* di esso, mi sono chiesto se non si poteva giungere alla risoluzione di quei problemi impiegando il procedimento usato da E. Cesàro (Introd. alla Teor. Mat. dell'Elasticità) per ritrovare le formole di Cerruti, riguardanti la deformazione del suolo per date forze e per dati spostamenti alla superficie. E cioè: applicare, in primo luogo, il principio delle immagini a ricercare l'espressione di una funzione regolare che soddisfaccia a speciali condizioni superficiali e il cui Δ_2 si conosca nello spazio occupato dal solido come una funzione *armonica;* in secondo luogo, cercare di eliminare dalle formole di u, v, w, ottenute in quel modo, le quantità incognite mediante le equazioni al contorno. Il risultato ha risposto affermativamente: le equazioni ai limiti forniscono sempre i valori superficiali di quelle funzioni (comprese fra la dilatazione θ e le sue derivate) che bastano alla determinazione dei termini incogniti.

In questo modo ottengo semplicemente le formole trovate da I. Boussinesq per la deformazione del suolo (*Comptes Rendus*, 1888) e mostro, nei casi relativi al diedro retto, che pure semplice è, per questo corpo, la deduzione delle forme esplicite di u, v, w, simili a quelle di Boussinesq; restando così completata la risoluzione, la cui possibilità è dimostrata dal metodo d'integrazione per gruppi.

Trattandosi poi di campi d'estensione infinita, ho creduto bene di premettere alcune osservazioni sulle condizioni di applicabilità, in tali spazi, delle solite formole di trasformazione degli integrali; condizioni che non furono mai enunciate esplicitamente da nessuno dei molti autori che si occuparono di problemi di questa specie.

§ 1.°

Sia $f(x\,y)$ una funzione regolare colle sue derivate prime nella regione infinita σ del piano $x\,y$ che è limitata dall'asse y e che contiene la direzione positiva dell'asse x. Assunte le nuove coordinate r, θ colla stessa origine delle primitive e con asse polare x, applichiamo la formola:

$$\int_s \frac{\partial f}{\partial x}\, d\,s = -\int_l f\,\frac{\partial x}{\partial n}\, d\,l \tag{1}$$

al semicerchio di raggio r, col centro nell'origine, che giace in σ; avremo:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \frac{\partial f}{\partial x}\, r\, d\,\theta\, d\,r = -\int_{-r}^{r} f\, d\,y - \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\,\frac{\partial x}{\partial n}\, r\, d\,\theta. \tag{2}$$

Supponiamo che la funzione f si annulli all'infinito di un ordine maggiore del primo; ossia che:

$$\lim_{r=\infty} f\,.\,r = 0$$

e vediamo che cosa diventa la (2) quando facciamo r infinitamente grande.

Il secondo termine del secondo membro della (2) tende evidentemente a zero, per r tendente all'infinito; non solo, ma l'integrale del primo membro converge, pure per $r=\infty$, a un limite finito e determinato. Basterà, per vedere ciò, che mostriamo come: data una quantità η piccola ad arbitrio, si possa sempre determinare un R tale, che per due qualuuque valori r_1, r_2 maggiori di R sia sempre verificata la disuguaglianza:

$$\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial f}{\partial x}\, r\, d\,\theta\, d\,r\right| < \eta.$$

Questa è, come si sa, la condizione per l'esistenza di un limite finito per $r = \infty$.

Ora, per l'ipotesi fatta su f, potremo porre, per qualunque campo che non comprenda l'origine $(r = 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{r^{2+\varepsilon}} K(r, \theta)$$

dove ε è positiva, e K è una funzione che si mantiene, in valore assoluto, inferiore ad una quantità fissa M, anche per $r = \infty$. Avremo allora, se $r_2 > r_1$:

$$\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial f}{\partial x} r \, d\theta \, d r \right| = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^{2+\varepsilon}} K . r \, d\theta \, d r \right| \leq M \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^{1+\varepsilon}} d\theta \, d r$$

$$\leq \frac{\pi M}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1^{\varepsilon}} - \frac{1}{r_2^{\varepsilon}} \right).$$

Se quindi scegliamo R in modo che sia:

$$R^{\varepsilon} > \frac{\pi M}{\varepsilon . \eta}$$

avremo anche:

$$\eta > \frac{\pi M}{\varepsilon} \frac{1}{R^{\varepsilon}} > \frac{\pi M}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1^{\varepsilon}} - \frac{1}{r_2^{\varepsilon}} \right)$$

qualunque siano $r_1 r_2$, purchè maggiori di R; e ciò dimostra che l'integrale considerato tende a un limite finito e determinato per $r = \infty$.

Quanto al terzo integrale esteso alla retta y, sappiamo che ammette un limite quando la funzione f gode della proprietà da noi qui supposta.

La (2) quindi, quando si fa tendere r all'infinito, diventa

$$\int_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x} d\sigma = - \int_{y} f \, d y.$$

Concludiamo che:

a) *La formola di trasformazione* (1) *vale per l'area piana infinita limitata da una retta, quando la funzione f diventa zero all'infinito di ordine maggiore del primo.*

In modo analogo si vedrebbe che:

b) *La formola*

$$\int_S \frac{\partial F}{\partial x} d S = -\int_s F \frac{\partial x}{\partial n} d s \tag{3}$$

vale per lo spazio S compreso fra due semipiani ortogonali tra loro, oppure giacente da una banda di un piano, quando F diventa zero all'infinito di un ordine maggiore di 2.

Riguardo a questi due spazi facciamo quest'altra osservazione:

c) Per ottenere la formola di Green:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_s \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right) d s - \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi \frac{dS}{r} \tag{4}$$

si deve applicare la formola (3), e le sue analoghe per le derivate $\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z}$, alle funzioni:

$$\left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) \quad \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

e perciò, se la funzione u, regolare colle sue derivate prime e seconde, si annulla all'infinito come $\frac{1}{r^{\varepsilon}}$, *(per* ε *qualunque purchè positivo) potremo rappresentarla in quei due spazi infiniti ancora colla formola* (4); e infatti, le tre funzioni scritte risultano in tal caso nulle all'infinito come $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$.

Osserviamo infine che, se $f(x, y)$ è una funzione regolare in tutti i punti del piano $x y$, e si annulla all'infinito di un ordine superiore al primo, allora è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} d x d y = 0. \tag{5}$$

Questa è una conseguenza immediata di ciò che si è detto riguardo al semipiano.

Se poi fosse

$$f = \rho(x y) \cdot \varphi(r)$$

essendo r la distanza $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+c^2}$ del punto $(x\,y)$ da un punto fisso (a, b, c) dello spazio, si avrebbe dalla (5):

$$\int_s \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi(r)\, d s = \int_s \rho \frac{\partial \varphi}{\partial a} d s \tag{d}$$

avendo chiamata s la superficie di tutto il piano $x\,y$; lo stesso si intende detto per la derivata rapporto ad y.

§ 2.°

Premesse queste osservazioni, occupiamoci del problema di Dirichlet nei due spazi seguenti: quello *limitato da un piano* e quello *limitato da due semipiani ortogonali fra loro.*

Cominciando dal primo di questi, supporremo che il piano limite sia il piano $z=0$, e che la direzione positiva dell'asse z sia diretta nell'interno dello spazio. Indicheremo con S lo spazio stesso e con s il contorno.

Sia U una funzione che si annulla all'infinito, regolare in S, e soddisfacente in tutti i punti di esso alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z) \\ &\Delta_2^{(2)} U = \Delta_2 \varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

La funzione U, a seconda che si conoscano sul piano s i suoi valori o quelli della derivata normale, è nota mediante le due formole seguenti (Vedi *Introduzione alla Teoria Mat. dell'Elasticità*, di E. Cesàro, pp. 84, 122)

$$\left.\begin{aligned} &U(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_s U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d s - \frac{1}{4\pi}\int_s \varphi \frac{\partial r}{\partial z} d s \\ &U(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{d s}{r} - \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \cdot r\, d s. \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

In queste, come al solito, x, y, z indicano le coordinate del punto di S in cui si calcola il valore di U; ξ, η, ζ quelle di un punto corrente di s, ed è $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Passando al caso dello spazio limitato da due piani, il quale chiameremo S', supporremo che i due semipiani limiti $s_1\, s_2$ siano rispettivamente le due falde positive dei piani $x=0$ $y=0$, contenenti cioè le direzioni positive degli assi y ed x.

Sia U ancora una funzione regolare in S', in tutti i punti del quale soddisfa alle equazioni (1), e si annulli a distanza infinita. Mantenendo le stesse notazioni, potremo, per la formola di Green, scrivere intanto:

$$\left.\begin{aligned} U(x,\, y,\, z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{s_1}\left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)d\,s_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{s_2}\left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)d\,s_2 - \frac{1}{4\pi}\int_{S'}\frac{\varphi\, d\,S'}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Inoltre, se g è una qualunque funzione regolare e armonica in S', applicando il teorema di Green alle funzioni U e g, si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{4\pi}\int_{s_1}\left(U\frac{\partial g}{\partial\xi} - g\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)d\,s_1 - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{s_2}\left(U\frac{\partial g}{\partial\eta} - g\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)d\,s_2 + \frac{1}{4\pi}\int_{S'} g\,.\,\varphi\, d\,S' \end{aligned}$$

la quale sommata colla (2) ci dà:

$$\left.\begin{aligned} U(x,\, y,\, z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{s_1}\left\{U\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} - \frac{\partial g}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial U}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r} - g\right)\right\}d\,s_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{s_2}\left\{U\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \frac{\partial g}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial U}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r} - g\right)\right\}d\,s_2 - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{S'}\varphi\left(\frac{1}{r} - g\right)d\,S'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Poniamo ora:

$$r_1 = \sqrt{(\xi+x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2} \qquad r_2 = \sqrt{(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2 + (\zeta-z)^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta+y)^2 + (\zeta-z)^2}.$$

Con ciò verremo a chiamare $r_1\, r_2\, r_3$ le distanze del punto (ξ, η, ζ) dai *punti immagini* di (x, y, z) rispetto ai piani limiti $s_1\, s_2$. Le funzioni $\frac{1}{r}, \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$ sono, come è facile vedere, legate in superficie dalle relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{per } \xi = 0) & \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3} \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r_3}}{\partial \xi} \\ (\text{per } \eta = 0) & \frac{1}{r} = \frac{1}{r_3} \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \frac{1}{r_3}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \eta} \end{array}\right\} \quad (4)$$

e per conseguenza se poniamo:

$$G = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \qquad G' = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}$$

$$G'' = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \qquad G''' = -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

le funzioni G saranno regolari e armoniche in S', e soddisferanno alle condizioni superficiali seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{per } \xi = 0) & G = \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial G'}{\partial \xi} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}; \quad G'' = \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial G'''}{\partial \xi} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \\ (\text{per } \eta = 0) & G = \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial G'}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial G''}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}; \quad G''' = \frac{1}{r}. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Osservando queste, si vede che G e G' sono le due funzioni di Green per lo spazio S', le quali permettono di risolvere il problema di Dirichlet quando son noti i valori superficiali di U o della derivata normale; G'' e G''' sono due funzioni analoghe che portano alla soluzione del problema stesso, quando su un piano è nota la U e sull'altro $\frac{\partial U}{\partial n}$. Per ciò, basta prendere nella (3) per g succesivamente G, G', G'', G'''; ma il fatto che importa notare maggiormente è questo: *l'essere* $\varphi\ (= \Delta_2 U)$ *armonica in* S' *ci permette di trasformare subito gli integrali di spazio, che vengono a comparire nelle quattro espressioni di U, in integrali di superficie, per modo che queste vengano a contenere solo i valori superficiali di* $U, \frac{\partial U}{\partial n}, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

E invero, potendo scrivere:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{r}-G\right)\varphi\, d\,S' = -\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\varphi\, d\,S' =$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_{S'}\left[(r-r_1+r_2-r_3)\,\Delta_2\,\varphi-\varphi\,\Delta_2\,(r-r_1+r_2-r_3)\right]d\,S'$$

otterremo, pel teorema di Green:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{r}-G\right)\varphi\, d\,S' &= \frac{1}{8\pi}\int_{s_1}\varphi\,\frac{\partial}{\partial\,\xi}(r-r_1+r_2-r_3)\,d\,s_1 + \\ &+\frac{1}{8\pi}\int_{s_2}\varphi\,\frac{\partial}{\partial\,\eta}(r-r_1+r_2-r_3)\,d\,s_2\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

per essere $r-r_1+r_2-r_3=0$ su ambedue i piani. Allo stesso modo avremo:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{r}-G'\right)\varphi\, d\,S' &= -\frac{1}{8\pi}\int_{s_1}\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi}(r+r_1+r_2+r_3)\,d\,s_1 - \\ &-\frac{1}{8\pi}\int_{s_2}\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\eta}(r+r_1+r_2+r_3)\,d\,s_2\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

per essere invece $\frac{\partial}{\partial\,n}(r+r_1+r_2+r_3)=0$ sugli stessi piani, in grazia delle (4).

E così

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{r}-G''\right)\varphi\, d\,S' &= \frac{1}{8\pi}\int_{s_1}\varphi\,\frac{\partial}{\partial\,\xi}(r-r_1-r_2+r_3)\,d\,s_1 - \\ &-\frac{1}{8\pi}\int_{s_2}\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\eta}(r-r_1-r_2+r_3)\,d\,s_2 \\ -\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{r}-G'''\right)\varphi\, d\,S' &= -\frac{1}{8\pi}\int_{s_1}\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi}(r+r_1-r_2-r_3)\,d\,s_1 + \\ &+\frac{1}{8\pi}\int_{s_2}\varphi\,\frac{\partial}{\partial\,\eta}(r+r_1-r_2-r_3)\,d\,s_2\,.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Se dunque facciamo la detta sostituzione di G, G', G'', G''' a g nella (3),

servendoci delle (6) e tenendo conto da ultimo che:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \qquad \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \xi} = \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial x} \qquad \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial y}$$

avremo per la funzione U le quattro forme:

$$\left.\begin{aligned}
U = & -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1} U \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d s_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} U \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d s_2 - \\
& - \frac{1}{4\pi}\int_{s_1} \varphi \frac{\partial}{\partial x}(r - r_2)\, d s_1 - \frac{1}{4\pi}\int_{s_2} \varphi \frac{\partial}{\partial y}(r - r_2)\, d s_2 \\
U = & -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1} \frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}\right) d s_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}\right) d s_2 - \\
& - \frac{1}{4\pi}\int_{s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(r + r_2)\, d s_1 - \frac{1}{4\pi}\int_{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(r + r_2)\, d s_2 \\
U = & -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1} U \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}\right) d s_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d s_2 - \\
& - \frac{1}{4\pi}\int_{s_1} \varphi \frac{\partial}{\partial x}(r + r_2)\, d s_1 - \frac{1}{4\pi}\int_{s_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(r - r_2)\, d s_2 \\
U = & -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1} \frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d s_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} U \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}\right) d s_2 \\
& - \frac{1}{4\pi}\int_{s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(r - r_2)\, d s_1 - \frac{1}{4\pi}\int_{s_2} \varphi \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d s_2 .
\end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Delle formole (α) e β) ci serviremo per rappresentare le componenti u, v, w dello spostamento, nella deformazione elastica del *suolo* e del *diedro retto*, omogenei e isotropi, in assenza di forze di massa; in questo caso, sappiamo infatti, i valori di $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$, $\Delta_2 w$ sono uguali, a meno d'un fattore costante, alle derivate prime della dilatazione θ, e sono quindi funzioni armoniche (perchè lo è θ).

§ 3.°

Abbiasi un solido omogeneo, isotropo (colle costanti α, β d'isotropia) occupante lo spazio infinito che abbiamo chiamato S, e si voglia risolvere il problema dell'equilibrio elastico quando le forze di massa sono nulle e sul piano limite $z = 0$ sono date:

I. $u, \; v, \; N$

oppure:

II. $L, \; M, \; w.$

Supporremo che le u, v, w; L, M, N si annullino a distanza infinita (le L, M, N di un ordine naturalmente superiore di un'unità a quello di u, v, w) e ciò legittimamente, perchè le equazioni dell'equilibrio determinano la deformazione non completamente, ma a meno di uno spostamento rigido del corpo.

Caso I. Il problema elastico è quello della ricerca di tre funzioni u, v, w soddisfacenti in tutto S alle equazioni indefinite.

$$\Delta_2 (u, \; v, \; w) = - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} \frac{\partial \theta}{\partial (x, \; y, \; z)} \qquad \left[\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

e legate in superficie da relazioni che possiamo scrivere brevemente così:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{per } z = 0) \qquad u = u(\xi, \; \eta) \qquad v = v(\xi, \; \eta) \\ \dfrac{\partial w}{\partial \zeta} = - \dfrac{1}{2 \beta^2} N - \dfrac{\alpha^2 - 2 \beta^2}{2 \beta^2} \theta, \end{array}\right\} \tag{1}$$

dove $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ sono i valori dati di u e v sopra il piano s.

La terza di queste non è altro che l'equazione ai limiti:

$$N = - (\alpha^2 - 2 \beta^2) \theta \frac{\partial \zeta}{\partial n} - 2 \beta^2 \frac{\partial w}{\partial n} - \beta^2 \left(T_2 \frac{\partial \xi}{\partial n} - T_1 \frac{\partial \eta}{\partial n} \right)$$

nella quale si è posto $d n = d \zeta$.

Potendo noi rappresentare le u, v, w mediante le formole (α) riportate addietro [v. (c)], vediamo già che la conoscenza di θ o delle sue derivate nello spazio S non è affatto necessaria, ma bensì bisognerà conoscere alcuni fra i valori superficiali di θ e delle sue derivate; orbene, il fatto importante

che si verifica e per il quale le (α) ci portano immediatamente alla soluzione del problema, è questo: *le equazioni ai limiti ci dànno senz'altro i valori che ci abbisognano.*

E infatti, le formole che otteniamo, applicando le (α), sono:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\int_s u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d s + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial z} d s \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\int_s v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d s + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial z} d s \\ w &= \frac{1}{4\pi\beta^2}\int_s N\frac{d s}{r} + \frac{\alpha^2-2\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \theta\frac{d s}{r} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}\cdot r\, d s \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

e in esse tutto è noto, una volta che si conosca il valore di θ, per $z=0$, come una funzione di ξ e di η, perchè è:

$$\int_s \frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}\cdot r\, d s = -\int_s\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}\right) r\, d s.$$

Ora, dalle (1) si ricava appunto:

$$(\text{per } z=0) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2\beta^2}N - \frac{\alpha^2-2\beta^2}{2\beta^2}\theta + \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

ossia:

$$(\text{per } z=0) \quad \theta = -\frac{1}{\alpha^2}N + \frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\right). \qquad (3)$$

Questa circostanza notevole si presenta anche, come vedremo, nel II caso e così pure nei problemi analoghi relativi al diedro retto, e cioè:

Le equazioni ai limiti determinano sempre, fra i valori di θ e delle sue derivate, quelli che bastano a far noti gli integrali dipendenti da θ che compaiono nelle espressioni di u, v, w (ricavate dall'applicazione delle (α) e delle (β)).

Volendo, nel presente caso, ridurre le (2) alla forma data da I. Boussinesq alle u, v, w (*Comptes Rendus*, 1888), osserviamo che le funzioni

$$\theta\frac{\partial r}{\partial x},\quad \theta\frac{\partial r}{\partial y},\quad \theta\frac{\partial r}{\partial z};\qquad \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot r,\quad \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot r$$

sono nulle all'infinito d'ordine certamente superiore al primo; quindi potremo

applicare la formola (d) dimostrata in principio, e scrivere:

$$\int_s \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial z} d s = \int_s \theta \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} d s = z \frac{\partial}{\partial x} \int_s \theta \frac{d s}{r} \therefore$$

$$\therefore \int_s \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial z} d s = z \frac{\partial}{\partial y} \int_s \theta \frac{d s}{r}$$

$$\int_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \cdot r\, d s = -\int_s \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}\right) r\, d s = -\int_s \theta \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) d s =$$

$$= z \frac{\partial}{\partial z} \int_s \theta \frac{d s}{r} - \int_s \theta \frac{d s}{r}.$$

Se poniamo (*):

$$U = \int_s u \frac{d s}{r} \qquad V = \int_s v \frac{d s}{r} \qquad N = \frac{1}{2 \beta^2} \int_s N \frac{d s}{r}$$

avremo per la (3) e per la proprietà (d)

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d s}{r} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \int_s \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{d s}{r} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \int_s \theta \frac{d s}{r} = \frac{2 \beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - N\right)$$

per essere $\frac{u}{r}\ \frac{v}{r}$ nulle all'infinito d'ordine maggiore dell'unità.

Sostituendo nelle (2) i valori ottenuti, si hanno le formole volute:

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \pi \alpha^2} z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - N\right) \\
v &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \pi \alpha^2} z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - N\right) \\
w &= -\frac{\beta^2}{2 \pi \alpha^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} N\right) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \pi \alpha^2} z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - N\right).
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

(*) Un integrale $\int_\sigma f d\sigma$ esteso ad un'area piana σ, infinita, non ha in generale un valore finito determinato; una condizione sufficiente perchè ciò sia, è (per la dimostrazione fatta nello stabilire (a)) che f si comporti all'infinito come $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$. Nel caso di U, V questa condizione non è soddisfatta dalle funzioni $\frac{u}{r}\ \frac{v}{r}$, avendo solo supposto da principio che u, v, w si annullino all'infinito come $\frac{1}{r^\varepsilon}$; nel calcolo che segue supponiamo soddisfatta anche questa condizione.

Caso II. In questo secondo caso le condizioni superficiali imposte alle u, v, w sono invece:

$$\text{(per } z=0) \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\beta^2} L - \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\beta^2} M - \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad w = w(\xi, \eta) \qquad (4)$$

come risulta dalle equazioni ai limiti, ponendovi come nel primo caso $d n = d \zeta$.

Applicando le formole (α), si ottengono per prime espressioni di u, v, w le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi\beta^2}\int_s L \frac{ds}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{ds}{r} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \zeta}\cdot r\, ds \\ v &= \frac{1}{2\pi\beta^2}\int_s M \frac{ds}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{ds}{r} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \zeta}\cdot r\, ds \\ w &= \frac{1}{2\pi}\int_s w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_s \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\frac{\partial r}{\partial z} d s. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

In queste, le sole quantità incognite sono i valori che assume $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$ sul piano s; questi precisamente ci dànno le relazioni (4). Difatti essendo

$$\Delta_2 w = -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} &= -\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \\ &= -\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

ossia:

$$\text{(per } z=0) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial M}{\partial \eta} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right).$$

Così resta risoluto il problema; per ridurre poi le (5) alle formole di Boussinesq per questo caso, notiamo che (per la proprietà (d)) si ha:

$$\int_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \zeta}\cdot r\, ds = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{1}{\beta^2}\int_s \frac{\partial L}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial x} ds + \frac{1}{\beta^2}\int_s \frac{\partial M}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial x} ds + \right.$$
$$\left. + 2\int_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} d s\right]$$

che di più:

$$\int_s \frac{\partial L}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial x} d s = \int_s L \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d s \qquad \int_s \frac{\partial M}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial x} d s = \int_s M \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d s$$

$$\int_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} d s = \int_s \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\right) d s = \int_s w \left(\frac{\partial^3 r}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}\right) d s$$

$$= 2 \int_s w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d s - \int_s w \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2} d s.$$

Se facciamo quindi le posizioni:

$$W = \int_s w \frac{d s}{r} \qquad \mathbf{L} = \frac{1}{2 \beta^2}\int_s L \frac{d s}{r} \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{2 \beta^2}\int_s M \frac{d s}{r}$$

$$W' = \int_s w \,.\, r\, d s \qquad \mathbf{L}' = \frac{1}{2 \beta^2}\int_s L \,.\, r\, d s \qquad \mathbf{M}' = \frac{1}{2 \beta^2}\int_s M \,.\, r\, d s$$

otterremo:

$$\int_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \zeta} \,.\, r\, d s = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial y} + 4 W - 2 \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2}\right).$$

E in modo analogo:

$$\int_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \zeta} \,.\, r\, d s = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial y} + 4 W - 2 \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2}\right)$$

$$\int_s \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\frac{\partial r}{\partial z} d s = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial y} + 4 W - 2 \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2}\right).$$

Sostituendo nelle (5) questi valori, abbiamo le formole volute:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\mathbf{L}}{\pi} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \pi \alpha^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial y} - \frac{2 \beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} W - \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2}\right) \\ v &= \frac{\mathbf{M}}{\pi} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \pi \alpha^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial y} - \frac{2 \beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} W - \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2}\right) \\ w &= -\frac{1}{\pi}\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \pi \alpha^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{L}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial y} - \frac{2 \beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} W - \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Le (A) e (B) ci dànno appunto la soluzione dei due problemi I e II sotto la forma trovata da Boussinesq, e alla quale volevamo arrivare.

§ 4.°

Se il solido, di cui si vuole studiare la deformazione, occupa la regione dello spazio che abbiamo chiamata S', i problemi d'equilibrio che corrispondono ai due testè considerati, relativi al suolo elastico, sono in sostanza tre; potranno cioè essere date

I:

(Sopra s_1 ossia per $x = 0$) L, v, w

(» s_2 » » $y = 0$) u, M, w.

II:

(per $x = 0$) u, M, N

(per $y = 0$) L, v, N.

III:

(per $x = 0$) L, v, w

(per $y = 0$) L, v, N.

Il caso in cui fossero date sopra s_1: u, M, N e sopra s_2: u, M, w, rientra nel terzo dei soprascritti.

I caso. — Le funzioni u, v, w, che cerchiamo, soddisfanno in tutto S' alle equazioni

$$\Delta_2 (u, v, w) = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} \frac{\partial \theta}{\partial (x, y, z)} \tag{1}$$

e sono nulle all'infinito; esse e le loro derivate normali sono date in superficie delle relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&(\text{per } x = 0) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2\beta^2} L - \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2\beta^2} \theta \quad v = v(\eta, \zeta) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w = w(\eta, \zeta) \\
&(\text{per } y = 0) \quad u = u(\xi, \zeta) \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\beta^2} M - \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2\beta^2} \theta \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w = w(\xi, \zeta)
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

le quali si ricavano delle equazioni ai limiti, ponendovi una volta $dn = d\xi$ e un' altra $dn = d\eta$.

Servendoci perciò delle formole (β), potremo intanto mettere u, v, w sotto la forma seguente:

$$
\left.
\begin{aligned}
u = & \frac{1}{4\pi\beta^2}\int_{s_1} L\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) d s_1 + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1} \theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) d s_1 - \\
& - \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} u \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right) d s_2 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(r - r_2)\, d s_1 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_2}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d s_2 \\
v = & - \frac{1}{2\pi}\int_{s_1} v \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right) d s_1 + \frac{1}{4\pi\beta^2}\int_{s_2} M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) d s_2 + \\
& + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_2} \theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) d s_2 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x}(r + r_2)\, d s_1 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta_2}\int_{s_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}(r - r_2)\, d s_2 \\
w = & - \frac{1}{2\pi}\int_{s_1} w \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) d s_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{r_2} w \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right) d s_2 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial x}(r_1 - r_2)\, d s_1 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_2}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial y}(r - r_2)\, d s_2 .
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

Qui, come nel primo caso relativo al suolo, le quantità incognite sono i valori superficiali di θ; perchè:

$$\int_{s_1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(r - r_2)\, d s_1 = - \int_{s_1}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}\right)(r - r_2)\, d s_1 ;$$

$$\int_{s_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}(r - r_2)\, d s_2 = - \int_{s_2}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}\right)(r - r_2)\, d s_2 .$$

Quei valori ci sono dati dalle relazioni (2). Difatti, da esse abbiamo:

$$(\text{per } x=0) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{1}{2\beta^2}L-\frac{\alpha^2-2\beta^2}{2\beta^2}\theta+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

$$(\text{per } y=0) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{1}{2\beta^2}M-\frac{\alpha^2-2\beta^2}{2\beta^2}\theta+\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{per } x=0) \quad \theta=\frac{1}{\alpha^2}L+\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\\&(\text{per } y=0) \quad \theta=-\frac{1}{\alpha^2}M+\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Le (3), (4) risolvono il problema.

Facilmente possiamo dare ad u, v, w una forma simile alle (A) del paragrafo precedente. Osserviamo a questo scopo che: se $\rho(\eta, \zeta)$ è una funzione regolare in tutti i punti del semipiano s_1, se $f(r)$ è una funzione della sola $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ e se il prodotto $\rho . f$ diventa zero all'infinito di ordine maggiore di *uno*, allora, applicando a questo prodotto la solita formola di trasformazione, otterremo:

$$\int_{s_1}\frac{\partial \rho}{\partial(\eta, \zeta)}f(r)\,d s_1=\int_{s_1}\rho\frac{\partial f}{\partial(y, z)}d s_1-\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\cdot f\frac{\partial(\eta, \zeta)}{\partial \eta}d\zeta.$$

Se in luogo di r comparisse la funzione $r_2=\sqrt{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2+(\zeta-z)^2}$, si avrebbero evidentemente le altre due:

$$\int_{s_1}\frac{\partial \rho}{\partial(\eta, \zeta)}f(r_2)\,d s_1=-\int_{s_1}\rho\cdot\frac{\partial f}{\partial(y, z)}d s_1-\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\cdot f\cdot\frac{\partial(\eta, \zeta)}{\partial \eta}d\zeta. \tag{5}$$

Per una funzione $\rho'(\xi, \zeta)$, regolare in tutto il campo s_2, si avranno le relazioni analoghe:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{s_2}\frac{\partial \rho'}{\partial(\xi, \zeta)}\cdot f(r)\,d s_2=\int_{s_2}\rho'\cdot\frac{\partial f}{\partial(x, z)}d s_2-\int_{-\infty}^{+\infty}\rho'\cdot f\cdot\frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial \xi}d\zeta\\&\int_{s_2}\frac{\partial \rho'}{\partial(\xi, \zeta)}\cdot f(r_2)\,d s_2=-\int_{s_2}\rho'\cdot\frac{\partial f}{\partial(x, z)}d s_2-\int_{-\infty}^{+\infty}\rho'\cdot f\frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial \xi}d\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Ciò posto, notiamo che le funzioni

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(r \pm r_2), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(r \pm r_2), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}(r \pm r_2); \quad \zeta \frac{\partial}{\partial x}(r \pm r_2) \text{ ecc.} \ldots$$

si annullano a distanza infinita di ordine certamente superiore all' unità; quindi potremo [v. (a)] applicare ad esse le (5) e (5)'. Tenendo presente che $r - r_2 = 0$ sopra l'asse z, avremo:

$$\int_{s_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}(r - r_2)\, d\, s_1 = \int_{s_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial z}(r - r_2)\, d\, s_1 = \int_{s_1} \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2}(r - r_2)\, d\, s_1$$

$$\int_{s_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}(r - r_2)\, d\, s_1 = \int_{s_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, s_1 = \int_{s_1} \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2}(r - r_2)\, d\, s_1 -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, \zeta$$

$$\int_{s_2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, s_2 = \int_{s_2} \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(r - r_2)\, d\, s_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, \zeta.$$

Quindi sarà:

$$\int_{s_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(r - r_2)\, d\, s_1 + \int_{s_2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, s_2 = - \int_{s_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}(r - r_2)\, d\, s_1 -$$

$$- \int_{s_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}(r - r_2)\, d\, s_1 + \int_{s_2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, s_2 = -$$

$$= - \int_{s_1} \theta \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(r - r_2)\, d s_1 + \int_{s_2} \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(r - r_2)\, d\, s_2$$

od anche:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{s_1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(r - r_2)\, d\, s_1 + \int_{s_2} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y}(r + r_2)\, d\, s_2 = x \frac{\partial}{\partial x} \int_{s_1} \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d\, s_1 - \\ &\quad - \int_{s_1} \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d\, s_1 + y \frac{\partial}{\partial x} \int_{s_2} \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) d\, s_2 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

per essere:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(r-r_2)=2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(r-r_2)$$

$$(\text{per } \xi=0) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r-r_2)=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Analogamente avremo:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{s_1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}(r+r_2)\,d s_1+\int_{s_2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}(r-r_2)\,d s_2=y\frac{\partial}{\partial y}\int_{s_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2-\\
&\qquad\qquad-\int_{s_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2+x\frac{\partial}{\partial y}\int_{s_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_1\\
&\int_{s_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial x}(r-r_2)\,d s_1=\int_{s_1}\theta\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(r-r_2)\,d s_1=\\
&\qquad\qquad=x\frac{\partial}{\partial z}\int_{s_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_1\\
&\int_{s_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial y}(r-r_2)\,d s_2=\int_{s_2}\theta\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(r-r_2)\,d s_2=\\
&\qquad\qquad=y\frac{\partial}{\partial z}\int_{s_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Se ora facciamo le posizioni (*):

$$U=\int_{s_2}u\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)d s_2 \quad V=\int_{s_1}v\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)d s_1 \quad W_1=\int_{s_1}w\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_1$$

$$W_2=\int_{s_2}w\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2 \quad \mathbf{L}=\frac{1}{2\beta^2}\int_{s_1}L\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_1$$

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2\beta^2}\int_{s_2}M\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2$$

avremo in grazia delle (4):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{s_1}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_1=\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W_1}{\partial z}-\mathbf{L}\right)\\
&\int_{s_2}\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2=\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\mathbf{M}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

(*) V. Nota precedente.

Andando a sostituire i valori trovati (6) e (7) nelle formule (3), queste assumono la forma:

$$\left.\begin{aligned}
u = & -\frac{\beta^2}{2\pi\alpha^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W_1}{\partial z}-\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\mathbf{L}\right)+ \\
& +\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\alpha^2}\,x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W_1}{\partial z}-\mathbf{L}\right)+ \\
& +\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\alpha^2}\,y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\mathbf{M}\right)-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial y} \\
v = & -\frac{\beta^2}{2\pi\alpha^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\mathbf{M}\right)+ \\
& +\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\alpha^2}\,x\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W_1}{\partial z}-\mathbf{L}\right)+ \\
& +\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\alpha^2}\,y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\mathbf{M}\right)-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial x} \\
w = & \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\alpha^2}\,x\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W_1}{\partial z}-\mathbf{L}\right)+ \\
& +\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\alpha^2}\,y\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W_2}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\mathbf{M}\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}+\frac{\partial W_2}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (A)'$$

Queste sono le formole che ci siamo proposto di ottenere; osservando le (A), e tenendo presente che nelle condizioni del problema che ora ci occupa, le u e v tengono il posto che aveva w quando si trattava del suolo, si scorge la perfetta analogia che passa tra i due sistemi di integrali.

Caso II. — Le u, v, w devono verificare in S' ancora le (1); esse e le loro derivate normali sono in superficie date dalle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&(\text{per } \xi=0) \quad u=u(\eta,\zeta) \quad \frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{1}{\beta^2}M-\frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{1}{\beta^2}N-\frac{\partial u}{\partial \zeta} \\
&(\text{per } \eta=0) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=-\frac{1}{\beta^2}L-\frac{\partial v}{\partial \xi} \quad v=v(\zeta,\xi) \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}=-\frac{1}{\beta^2}N-\frac{\partial v}{\partial \zeta}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

le quali (quelle a derivate) non sono altro che le equazioni ai limiti nelle quali si è posto:

$$(\text{per } \xi=0) \quad dn=d\xi$$
$$(\text{per } \eta=0) \quad dn=d\eta.$$

Se costruiamo le espressioni di u, v, w coll'impiego delle formole (β) ot-

teniamo:

$$\left.\begin{aligned}
u = & -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_1} u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)d s_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_2}\left(\frac{1}{\beta^2}L+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_2 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int\limits_{s_1}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}(r+r_2)\,d s_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int\limits_{s_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta}(r-r_2)\,d s_2 \\
v = & -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_2} v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)d s_2 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_1}\left(\frac{1}{\beta^2}M+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)d s_1 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int\limits_{s_1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta}(r-r_2)\,d s_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int\limits_{s_2}\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}(r+r_2)\,d s_2 \\
w = & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_1}\left(\frac{1}{\beta^2}N+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)d s_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_2}\left(\frac{1}{\beta^2}N+\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)d s_2 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int\limits_{s_1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \zeta}(r+r_2)\,d s_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int\limits_{s_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \zeta}(r+r_2)\,d s_2 .
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Basta dunque, come si vede osservando queste espressioni, cercare i valori di $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ rispettivamente per $\xi = 0$ ed $\eta = 0$, per avere quelli di u, v, w. Quei valori sono appunto quelli datici dalle equazioni ai limiti (8).

Infatti da esse ricaviamo, tenendo conto dei valori di $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$ dati dalle (1):

$$(\text{per } \xi = 0) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} = -2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right) -$$

$$-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial M}{\partial \eta}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial N}{\partial \zeta}$$

$$(\text{per } \eta = 0) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \zeta} = -2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}\right) -$$

$$-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}\frac{\partial \theta}{\partial \eta}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial L}{\partial \xi}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial N}{\partial \zeta}$$

ovvero:

$$
\left.\begin{aligned}
&(\text{per } \xi = 0) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial N}{\partial \zeta} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right)\\
&(\text{per } \eta = 0) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial L}{\partial \xi} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (10)
$$

Le formole (9) e (10) risolvono completamente il problema nel caso II.

Caso III. — In questo terzo ed ultimo caso, infine, i valori superficiali di u, v, w o delle loro derivate normali ricavati dalle equazioni al contorno, dopo aver posto in queste

$$
\begin{aligned}
&(\text{per } \xi = 0) \qquad d\,n = d\,\xi\\
&(\text{per } \eta = 0) \qquad d\,n = d\,\eta
\end{aligned}
$$

sono:

$$
\left.\begin{aligned}
&(\text{per } \xi = 0) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2\beta^2}L - \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2\beta^2}\theta \quad v = v(\eta, \zeta) \quad w = w(\eta, \zeta)\\
&(\text{per } \eta = 0) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\beta^2}L - \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad v = v(\zeta, \xi) \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{1}{\beta^2}N - \frac{\partial v}{\partial \zeta}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)
$$

Da queste, coll'aiuto delle equazioni indefinite (1), ricaviamo

$$
(\text{per } \xi = 0) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2\beta^2}L - \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2\beta^2}\theta + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{per } \eta = 0) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \zeta} = &-2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}\right) -\\
&- \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial N}{\partial \zeta}
\end{aligned}
$$

ovvero:

$$
\left.\begin{aligned}
&(\text{per } \xi = 0) \quad \theta = -\frac{1}{\alpha^2}L + \frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\\
&(\text{per } \eta = 0) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial L}{\partial \xi} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

Questi valori bastano a risolvere il problema. Difatti, scriviamo le espres-

sioni di u, v, w che si ottengono applicando le formole solite (β); esse sono:

$$
\left.
\begin{aligned}
u = & \frac{1}{4\pi\beta^2}\int_{s_1} L\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)ds_1 + \frac{\alpha^2-2\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\theta\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)ds_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi}\int_{s_2}\left(\frac{1}{\beta^2}L+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)ds_2 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}(r+r_2)\,ds_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\,\partial\eta}(r+r_2)\,ds_2 \\
v = & -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1} v\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)ds_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{s_2} v\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)ds_2 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}(r-r_2)\,ds_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_2}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\frac{\partial}{\partial y}(r-r_2)\,ds_2 \\
w = & -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1} w\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)ds_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{s_2}\left(\frac{1}{\beta^2}N+\frac{\partial v}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)ds_2 + \\
& + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\,\frac{\partial}{\partial x}(r+r_2)\,ds_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{4\pi\beta^2}\int_{s_2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta\,\partial\zeta}(r-r_2)\,ds_2 .
\end{aligned}
\right\} \quad (13)
$$

E in esse tutti i termini sono noti quando sono noti i valori delle due funzioni θ, $\frac{\partial\theta}{\partial\eta}$ rispettivamente sopra s_1 ed s_2, perchè è:

$$\int_{s_1}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}(r+r_2)\,ds_1 = -\int_{s_1}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}\right)(r+r_2)\,ds_1 .$$

Le (12) e (13) risolvono quindi il problema nel caso III.

Tanto nel II che in questo III problema si potrebbero facilmente trovare le espressioni di u, v, w sotto forma analoga alla $(A)'$ con trasformazioni affatto simili a quelle che ci hanno condotti alle $(A)'$ stesse.

Integrazione geometrica di alcune equazioni differenziali.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, *a Parma.)*

Se un problema geometrico, risolto con un primo metodo, è ridotto all'integrazione di una certa equazione differenziale, e risolto con un secondo metodo è ridotto a sole quadrature, può avvenire che, col confronto delle due soluzioni, si riesca ad ottenere l'integrale generale di quell'equazione differenziale.

Per rendere ciò manifesto con un esempio, proponiamoci il seguente problema: *Determinare una linea a doppia curvatura colle due condizioni:*

1.° *che il raggio vettore R, che dall'origine degli assi va a un punto arbitrario della linea, sia una funzione nota dell'arco;*

2.° *che il coseno dell'angolo ω, sotto il quale la linea sega i meridiani della superficie generata dalla medesima, nella sua rotazione attorno all'asse delle z, sia una funzione nota dell'arco.*

Le coordinate dei punti di una linea qualsivoglia si possono esprimere, in funzione dell'arco, per mezzo delle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \,.\, \cos\left(\int \frac{\sqrt{1-\rho'^2-\lambda'^2}}{\rho} \cdot d\,s\right) \\ y &= \rho \,.\, \operatorname{sen}\left(\int \frac{\sqrt{1-\rho'^2-\lambda'^2}}{\rho} \cdot d\,s\right) \\ z &= \lambda(s). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ed allora, essendo:

$$\cos\omega = \sqrt{\rho'^2 + \lambda'^2},$$

si deduce:

$$\lambda = \int \sqrt{\cos^2\omega - \rho'^2} \,.\, d\,s, \tag{2}$$

potendosi evidentemente mettere a zero la costante arbitraria (additiva) che viene dall'integrazione.

Notando che

$$\rho^2 + z^2 = R^2,$$

se si tiene conto dell'espressione (2) di λ e si applicano le equazioni (1), si trova che *la linea richiesta è rappresentata dalle equazioni:*

$$\left.\begin{aligned} x = \rho \,.\, \cos\left(\int \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho}\, d\, s\right), \quad y = \rho \,.\, \operatorname{sen}\left(\int \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho}\, d\, s\right), \\ z = \int \sqrt{\cos^2\omega - \rho'^2}\, d\, s\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dove ρ *è definita in funzione di* s *per mezzo dell'equazione differenziale:*

$$\rho'^2 - \frac{2\,R'}{R}\cdot\rho\,\rho' + \frac{\cos^2\omega}{R^2}\,\rho^2 = \cos^2\omega - R'^2. \tag{4}$$

Le coordinate dei punti di una linea possono esprimersi, in funzione dell'arco, anche per mezzo delle equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} x &= R \operatorname{sen}\varphi \,.\, \cos\left(\int \frac{\sqrt{1 - R'^2 - R^2\varphi'^2}}{R \operatorname{sen}\varphi}\cdot d\, s\right) \\ y &= R \operatorname{sen}\varphi \,.\, \operatorname{sen}\left(\int \frac{\sqrt{1 - R'^2 - R^2\varphi'^2}}{R \operatorname{sen}\varphi}\cdot d\, s\right) \\ z &= R \cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

In questa ipotesi si trova:

$$\cos\omega = \sqrt{R'^2 + R^2\varphi'^2},$$

da cui si ricava:

$$\varphi = \int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\cdot d\, s + c,$$

con c costante arbitraria.

Si vede quindi che *la linea domandata è anche definita dalle equazioni:*

$$\left\{\begin{aligned} x &= R \,.\, \operatorname{sen}\left(\int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\, d\, s + c\right).\, \cos\left\{\int \frac{\operatorname{sen}\omega \,.\, d\, s}{R\,.\,\operatorname{sen}\left(\int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\cdot ds + c\right)}\right\} \\ y &= R \,.\, \operatorname{sen}\left(\int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\, d\, s + c\right).\, \operatorname{sen}\left\{\int \frac{\operatorname{sen}\omega \,.\, d\, s}{R\,.\,\operatorname{sen}\left(\int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\cdot ds + c\right)}\right\} \\ z &= R \,.\, \cos\left(\int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\, d\, s + c\right). \end{aligned}\right.$$

Basta confrontare queste equazioni colle (3) per riconoscere che l'integrale generale dell'equazione (4) è:

$$\rho = R \,.\, \mathrm{sen}\left(\int \frac{\sqrt{\cos^2\omega - R'^2}}{R}\, d s + c\right)\cdot$$

Si verifica poi, colla prova diretta, che tale proprietà non cessa di sussistere se nella (4) l'arco s si sostituisce con una variabile indipendente qualunque, spogliando anche le funzioni arbitrarie ω, R di quel particolare significato geometrico che era loro stato attribuito. Cambiando allora s e ρ rispettivamente in x ed y, e ponendo inoltre:

$$M = -\frac{2R'}{R}, \quad N = \frac{\cos^2\omega}{R^2}, \quad P = \cos^2\omega - R'^2, \tag{5}$$

la (4) può scriversi:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + M \,.\, y\frac{dy}{dx} + N y^2 = P.$$

E siccome dalle (5) si ricava:

$$R = e^{-\frac{1}{2}\int M dx}, \quad \cos\omega = \sqrt{N} \,.\, e^{-\frac{1}{2}\int M dx}, \quad P = \left(N - \frac{M^2}{4}\right)e^{-\int M dx},$$

si ha il teorema:

L'integrale generale dell'equazione differenziale del primo ordine e del secondo grado:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + M \,.\, y\,\frac{dy}{dx} + N \,.\, y^2 = \left(N - \frac{M^2}{4}\right)e^{-\int M dx}$$

(dove M ed N sono due funzioni arbitrarie della sola x) è il seguente:

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int M dx} \cdot \mathrm{sen}\left(\int \sqrt{N - \frac{M^2}{4}} \cdot d x + c\right)\cdot$$

Parma, settembre 1903.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI.

In seguito a difficoltà d'ordine materiale è stato deciso che a partire dal Vol. VI della Serie III degli *Annali di Matematica* il prezzo degli *Estratti* (oltre le copie *quaranta* che mettiamo gratúitamente a disposizione dei Signori Autori presso l'editore), e fino alla concorrenza di *cento esemplari*, sarà regolato dalla tariffa seguente.

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI "ANNALI DI MATEMATICA"

(compresa la copertina non stampata, spese postali a parte).

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie			
	25	50	75	100
Pagine 4	Lire 3 —	Lire 3 50	Lire 4 —	Lire 4 50
" 8	" 3 50	" 4 —	" 4 50	" 5 —
" 12	" 6 50	" 7 50	" 8 50	" 9 50
" 16	" 7 —	" 8 —	" 9 —	" 10 —
" 20	" 10 —	" 11 50	" 13 —	" 14 50
" 24	" 10 50	" 12 —	" 13 50	" 15 —
" 28	" 13 50	" 15 50	" 17 —	" 19 50
" 32	" 14 —	" 16 —	" 18 —	" 20 —

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo.

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno, ciascuno di 10 a 12 fogli in 4.°

L'associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa lire 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o cartolina vaglia, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla Tipo-Litografia ***Rebeschini di Turati e C., via Rovello 16, Milano,*** alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

Ulrico Hoepli in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);

Carlo Clausen già Ermanno Loescher in Torino (via Po, 19, Palazzo della R. Università);

Fratelli Bocca in Torino, Roma, Firenze;

Gauthier-Villars in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);

Dulau et Comp. in Londra (37, Soho-Square);

R. Friedländer et Sohn in Berlino (Carlstrasse, 11).

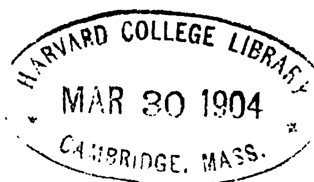
Di ogni pubblicazione inviata direttamente da Autori o Editori alla Direzione degli *Annali* verrà dato l'annunzio in due successivi fascicoli.

È in corso di stampa il fascicolo 3.° del tomo IX.°

ANNALI

DI

MATEMATICA



PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*
Corrado Segre *in Torino*

SERIE III.ª

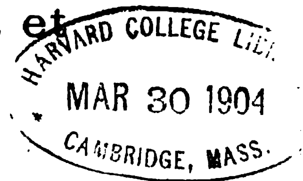
Tomo IX.° — Fascicolo 3.°-4.°

(Gennaio 1904.)

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues.



(Par NIELS NIELSEN, *à Copenhague.)*

I. DÉFINITIONS. FORMULES GÉNÉRALES.

Posons avec GAUSS (*)

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C - \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

où C désigne la constante d'EULER, nous aurons pour cette fonction plus commode mais intimément liée à $\Psi(x)$, savoir la fonction

$$s_1(x) = -\Psi(x) - C = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \tag{1}$$

ce développement en série de puissances

$$s_1(1-x) = s_2 x + s_3 x^2 + s_4 x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1, \tag{1bis}$$

dont les coefficients se déterminent comme voici

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots = s_n(1), \qquad n > 1, \tag{2}$$

où nous avons posé pour abréger

$$s_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot D_x^{n-1} s_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(x+\nu)^n}, \qquad n > 1. \tag{2bis}$$

La fonction $s_1(x)$ s'exprimera sans peine et sous forme simple comme

---

(*) *Disquisitiones generales circa functiones a seriem infinitam, etc.*, § 30; Œuvres, t. III.

intégrale définie, savoir

$$s_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{1 - t} \, dt, \qquad \Re(x)\,(*) > 0, \tag{3}$$

ce qui donnera aisément cette autre formule analogue

$$s_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log t)^{n-1} \, t^{x-1}}{1 - t} \, dt, \qquad \Re(x) > 0. \tag{3bis}$$

Nous avons encore à étudier cette nouvelle fonction transcendante

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2}\left(s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{x + \nu}, \tag{4}$$

pour laquelle nous trouvons se développement en série de puissances

$$\sigma_1(1 - x) = \sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \sigma_4 x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1, \tag{4bis}$$

dont les coefficients se déterminent comme voici

$$\sigma_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \cdots = \sigma_n(1), \qquad n \geq 1, \tag{5}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\sigma_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot D_x^{n-1} \, \sigma_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(x + \nu)^n} \cdot \tag{5bis}$$

Quant aux séries numériques σ_n, nous aurons pour $n = 1$

$$\sigma_1 = \log 2,$$

où le signe *log* désigne le logarithme népérien, et généralement pour $n > 1$

$$\sigma_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \cdot s_n \, .$$

La fonction $\sigma_1(x)$ s'exprimera aussi sous forme simple comme intégrale définie, savoir

$$\sigma_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1 + t} \, dt, \qquad \Re(x) > 0, \tag{6}$$

(*) Ici et dans ce qui suit $\Re(x)$ désigne la partie réelle de x.

ce qui donnera immédiatement cette autre formule analogue

$$\sigma_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log t)^{n-1} t^{x-1}}{1+t} dt, \qquad \Re(x) > 0. \qquad (6^{\text{bis}})$$

Dans les recherches que voici je me suis proposé d'étudier des représentations intégrales d'un produit de deux des fonctions $s_1(x)$, $s_1(1-x)$, $\sigma_1(x)$ et $\sigma_1(1-x)$ choisies d'une manière quelconque; les intégrales ainsi obtenues se présentent toutes sous la même forme que celles figurant au second membre de (3) et de (6). De plus, je me suis proposé de donner tous les développements possibles en séries de factorielles des produits susdits.

Il est évident qu'une telle recherche est intimément liée à une recherche sur les séries purement numériques s_n et σ_n. Quant à ces séries, il est bien connu que s_{2n} et σ_{2n} se présentent dans les séries de puissances obtenues pour $\pi \cot \pi x$ et $\pi \operatorname{coséc} \pi x$, ce qui nous permettra de déterminer à l'aide d'une puissance de π les sommes de toutes ces séries. On aura en effet

$$s_{2n} = \frac{2^{2n-1} \cdot B_{2n-1}}{(2n)!} \cdot \pi^{2n},$$

où les nombres B_{2n-1} sont les nombres rationnels de Bernoulli. Quant aux séries s_{2n+1} et σ_{2n+1}, à l'exception de $\sigma_1 = \log 2$, on ignore j'usqu'au présent complètement leur nature et ne connait aucune formule récursive pour leur détermination successive. Il est bien remarquable que l'on retrouve des propriétés analogues chez les sommes des puissances des valeurs réciproques des racines d'une fonction cylindrique de première espèce et de la fonction elliptique $p(x)$ de Weierstrass.

En effet, si l'exposant figurant dans la somme des puissances des valeurs réciproques des racines de $\overset{\nu}{J}(x)$ est un nombre pair, la somme en question se présente sous forme d'une fonction rationnelle du paramètre ν (*). Pour les racines de $p(x)$ les sommes, dont l'exposant est pair, s'expriment à l'aide des deux sommes qui correspondent aux exposants 4 et 6 (**). Si, au contraire, l'exposant susdit est impair, les sommes correspondantes sont complètement inconnues.

Or, dans les recherches qui nous occupent ici, nous avons besoin d'étudier

(*) Graf: *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen*, I, p. 190; Berne, 1898.
(**) Tannery et Molk: *Théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 176; Paris 1893.

les séries générales s_n et σ_n pour des valeurs paires ou impaires de l'indice n. Cependant des réflexions entièrement élémentaires nous conduiront à une groupe de formules qui donnent comme cas particuliers les formules récursives bien connues pour s_{2n} et σ_{2n}, et, sans faire connaître quelque chose sur la nature de s_{2n+1} et de σ_{2n+1} pour $n > 0$, ces formules générales suffisent pour la résolution des problèmes susdits.

II. Remarques générales sur les trois produits $s_n s_p$, $s_n \sigma_p$ et $\sigma_n \sigma_p$.

Appliquons maintenant la règle de Cauchy pour la multiplication de deux séries infinies mais absolument convergentes, nous aurons immédiatement cette formule

$$s_n s_p = s_{n+p} + c_{n,p} + c_{p,n}, \quad n > 1, \quad p > 1, \tag{7}$$

où nous avons posé pour abréger

$$c_{n,p} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^n}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^p}\right), \quad n > 1, \quad p \geqq 1.$$

De la même manière nous obtiendrons, en appliquant pour $p = 1$ un théoreme de M. Mertens (*), cette autre formule

$$s_n \sigma_p = \sigma_{n+p} + d_{n,p} - \gamma_{p,n}, \quad n > 1, \quad p \geqq 1, \tag{8}$$

où nous avons posé

$$d_{n,p} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^n}\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)^p}\right), \quad n > 1, \quad p \geqq 1$$

$$\gamma_{n,p} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^n}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^p}\right), \quad n \geqq 1, \quad p \geqq 1.$$

Enfin nous aurons, en appliquant pour $n = p = 1$ un théoreme de M. Pringsheim (**), cette troisième formule

$$\sigma_n \sigma_p = s_{n+p} - \delta_{n,p} - \delta_{p,n}, \quad n \geqq 1, \quad p \geqq 1, \tag{9}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 79.
(**) *Mathematische Annalen*, t. 21.

où nous avons posé pour abréger

$$\delta_{n,p} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^n}\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)^p}\right), \qquad n \geq 1, \qquad p > 1;$$

mettons dans (9) $p = q = 1$, nous trouvons cette formule particulière

$$\delta_{1,1} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2. \tag{9bis}$$

Il est évident que les quatre séries numériques à deux indices que nous venons d'introduire dans les expressions données pour les produits $s_n s_p$, $s_n \sigma_p$ et $\sigma_n \sigma_p$ jouent un rôle fondamental dans les recherches ultérieures sur ces produits. Or, il est très facile d'établir une foule d'autres formules contenant les séries $c_{n,p}$, $d_{n,p}$, $\gamma_{n,p}$, et $\delta_{n,p}$. Ici nous nous bornerons à indiquer quelques applications de la règle de décomposition de LAGRANGE (*), savoir la formule

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x^p(x-a)^2} &= (-1)^q \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \binom{q+\nu-1}{q-1} \cdot \frac{1}{x^{p-\nu}a^{q+\nu}} + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} \binom{p+\nu-1}{p-1} \cdot \frac{(-1)^\nu}{a^{p+\nu}(x-a)^{q-\nu}}, \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

où p et q désignent deux positifs entiers.

En effet, mettons dans (α) $x = n$ et $a = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, puis ajoutons toutes les équations ainsi obtenues prises avec des signes alternés, nous obtenons sans peine ces deux formules

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{p,q} &= (-1)^q \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \binom{q+\nu-1}{q-1} \gamma_{p-\nu,q+\nu} + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} (-1)^\nu \binom{p+\nu-1}{p-1} \sigma_{p+\nu} \cdot \sigma_{q-\nu} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{p,q} &= (-1)^q \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \binom{q+\nu-1}{q-1} \delta_{p-\nu,q+\nu} + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} (-1)^\nu \binom{p+\nu-1}{p-1} s_{p+\nu} \cdot \sigma_{q-\nu}; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

dans (11) il faut admettre $p > 1$, tandis que (10) garde sa validité même si

(*) Citation de M. L. SAUVAGE: *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes*, p. 176; Paris, 1895.

nous posons $p = q = 1$; nous aurons dans ce cas cette formule particulière

$$\gamma_{1,1} = \frac{1}{2} (\log 2)^2. \qquad (10^{\text{bis}})$$

Pour déduire à l'aide de (α) des expressions analogues pour les séries $c_{p,q}$ et $\delta_{p,q}$ il faut considérer séparément le dernier terme des deux sommes figurant au second membre de cette formule; avec cette précaution le même procédé donnera ces deux formules analogues.

$$\left.\begin{aligned} c_{p,q} = (-1)^q \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=p-2} \binom{q+\nu-1}{q-1} c_{p-\nu,q+\nu} + \\ + \sum_{\nu=0}^{\nu=q-2} (-1)^\nu \binom{p+\nu-1}{p-1} s_{q-\nu} \cdot s_{p+\nu} - \\ - (-1)^q \binom{p+q-2}{p-1} (s_{p+q} + c_{p+q-1,1}) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{p,q} = (-1)^q \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=p-2} \binom{q+\nu-1}{q-1} d_{p-\nu,q+\nu} + \\ + \sum_{\nu=0}^{\nu=q-2} (-1)^\nu \binom{p+\nu-1}{p-1} s_{q-\nu} \cdot \sigma_{p+\nu} + \\ + (-1)^q \binom{p+q-2}{p-1} (\gamma_{p+q-1,1} - \sigma_{p+q}); \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

dans le cas particulier $q = 1$ il faut dans ces formules supprimer au second membre les sommes qui deviendront illusoires. Dans (12) il faut toujours admettre $p > 1$, tandis que (13) donnera pour $p = 1$ ce cas particulier

$$\gamma_{q,1} - (-1)^q \delta_{1,q} = \sigma_{q+1} - \sum_{\nu=0}^{\nu=q-2} (-1)^\nu s_{q-\nu} \cdot \sigma_{\nu+1}. \qquad (13^{\text{bis}})$$

III. Formules récursives pour les séries s_n et σ_n.

Les formules plus générales que nous venons de développer nous fournissent un simple moyen pour déduire un nombre de formules récursives pour les séries numériques s_n et σ_n, formule qui nous conduiront aux formules bien connues pour s_{2n} et σ_{2n}.

Mettons en premier lieu dans (12) $q = 1$, nous aurons généralement,

pour $p > 2$, cette formule élégante

$$c_{p,1} = s_{p+1} - \sum_{2}^{p-1} c_{p-\nu+1,\nu} \tag{14}$$

et particulièrement pour $p = 2$

$$c_{2,1} = s_3. \tag{14bis}$$

Écrivons maintenant dans la somme figurant au second membre de (14) les termes dans l'ordre invers puis ajoutons à (14) la formule ainsi obtenue, nous aurons, en vertu de (7), cette formule récursive

$$\sum_{2}^{p-2} s_\nu s_{p-\nu+1} = p \cdot s_{p+1} - 2\, c_{p,1}; \tag{15}$$

posons ensuite dans (12) $p = 2$, $q = 2n - 2$, nous trouvons pour $n > 1$

$$(2n-2)(c_{2n-1,1} + s_{2n}) = \sum_{0}^{2n-4} (-1)^\nu (\nu+1)\, s_{\nu+2} \cdot s_{2n-\nu-2},$$

d'où, en écrivant dans l'ordre inverse les termes de la somme figurant au second membre, cette formule nouvelle

$$2(c_{2n-1,1} + s_{2n}) = \sum_{1}^{n-1} s_{2\nu} \cdot s_{2n-2\nu} - \sum_{1}^{n-2} s_{2\nu+1} \cdot s_{2n-2\nu-1}. \tag{15bis}$$

Cela posé, mettons dans (15) $p = 2n - 1$, nous aurons immédiatement, en vertu de (15bis), ces deux formules

$$\sum_{1}^{n-1} s_{2\nu} \cdot s_{2n-2\nu} = \frac{2n+1}{2} \cdot s_n \tag{16}$$

$$\sum_{1}^{n-2} s_{2\nu+1} \cdot s_{2n-2\nu-1} = \frac{2n-3}{2} \cdot s_{2n} - 2\, c_{2n-1,1}, \tag{16bis}$$

dont la première est bien connue; on la démontre ordinairement en s'appuyant sur des propriétés fondamentales des fonctions trigonométriques.

Prenons maintenant pour point de départ la formule (11), et posons-y $q = 1$, nous aurons

$$d_{p,1} = s_p \sigma_1 - \sum_{0}^{p-1} \delta_{p-\nu,\nu+1},$$

ce qui donnera, en vertu de (9) et en appliquant (8) pour $s_p \sigma_1$, cette autre formule récursive

$$\sum_{1}^{p} \sigma_\nu \sigma_{p-\nu+1} = p\, s_{p+1} - 2\, \sigma_{p+1} + 2\, \gamma_{1,p}; \tag{17}$$

mettons ensuite dans (10) $p = 1$, $q = 2n - 1$, nous aurons de même

$$\sum_0^{2n-2} (-1)^r \sigma_{r+1} \cdot \sigma_{2n-r-1} = 2\gamma_{1,2n-1}, \tag{17^{bis}}$$

d'où, en vertu de (17) pour $p = 2n - 1$,

$$\sum_1^{n-1} \sigma_{2r} \cdot \sigma_{2n-2r} = \frac{2n-1}{2} \cdot s_{2n} - \sigma_{2n} \tag{18}$$

$$\sum_0^{n-1} \sigma_{2r+1} \cdot \sigma_{2n-2r-1} = \frac{2n-1}{2} \cdot s_{2n} - \sigma_{2n} + 2\gamma_{1,2n-1}, \tag{18^{bis}}$$

formules dont la première est bien connues comme une conséquence immédiate des propriétés fondamentales des fonctions trigonométriques.

Pour obtenir une troisième catégorie des formules récursives posons dans (10) et dans (13) $q = 1$, nous aurons respectivement

$$2\gamma_{p,1} = \sigma_p \sigma_1 - \sum_0^{p-2} \gamma_{p-r,r+1}$$

$$\delta_{p,1} + \gamma_{p,1} = \sigma_{p+1} - \sum_0^{p-2} d_{p-r,r+1};$$

soustrayons maintenant ces deux formules, puis appliquons (8) et transformons à l'aide de (9) le produit $\sigma_p \sigma_1$, nous aurons

$$\gamma_{p,1} + \delta_{1,p} = \sum_0^{p-2} s_{p-r} \cdot \sigma_{r+1} + s_{p+1} - p\,\sigma_{p+1}. \tag{19}$$

La formule (13bis) donnera de même, pour $q = 2n - 1$, cette expression analogue

$$\gamma_{2n-1,1} + \delta_{1,2n-1} = \sum_0^{2n-3} (-1)^r \sigma_{r+1} \cdot s_{2n-r-1} + \sigma_{2n}, \tag{19^{bis}}$$

d'où, en vertu de (19) ces deux nouvelles formules récursives

$$\sum_1^{n-1} \sigma_{2r} \cdot s_{2n-2r} = n\,\sigma_{2n} - \frac{1}{2} s_{2n} \tag{20}$$

$$\sum_0^{n-2} \sigma_{2r+1} \cdot s_{2n-2r-1} = (n-1)\,\sigma_{2n} - \frac{1}{2} s_{2n} + \gamma_{2n-1,1} + \delta_{1,2n-1}. \tag{20^{bis}}$$

Considérons encore cette autre série numérique

$$t_n = \frac{1}{2^n} \cdot s_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots, \qquad n > 1,$$

ou, ce qui vaut autant,

$$t_n = \frac{1}{2}(s_n + \sigma_n),$$

nous aurons de (16) et (20) ou de (18) et (20) respectivement ces deux autres formules récursives

$$\sum_1^{n-1} t_{2r} \cdot s_{2n-2r} = n\, t_{2n} \tag{21}$$

$$\sum_1^{n-1} t_{2r} \cdot \sigma_{2n-2r} = (n-1)\, t_{2n}, \tag{21bis}$$

de façon qu'une addition de ces deux formules donnera cette autre

$$\sum_1^{n-1} t_{2r} \cdot t_{2n-2r} = \frac{2n-1}{2} \cdot t_{2n}. \tag{22}$$

IV. Applications aux fonctions $(s_1(x))^2$, $s_1(x)\,\sigma_1(x)$ et $(\sigma_1(x))^2$.

Les formules purement numériques que nous venons d'établir s'appliqueront immédiatement à l'évaluation de six produits formés de deux facteurs pris parmi ces quatre fonctions $s_1(x)$, $s_1(1-x)$, $\sigma_1(x)$ et $\sigma_1(1-x)$. Considérons d'abord le carré de $s_1(x)$, nous aurons, en vertu de (1bis), et en appliquant la règle de Cauchy

$$(s_1(1-x))^2 = \sum_{n=4}^{n=\infty} (s_2\, s_{n-2} + s_3\, s_{n-3} + \cdots + s_{n-2}\, s_2)\, x^{n-2},$$

d'où, en vertu de (15) et de (14bis),

$$(s_1(1-x))^2 = s_2(1-x) - s_2 - 2 \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} c_{n,1}\, x^{n-1}.$$

Pour transformer ensuite la série infinie figurant au second membre de cette formule introduisons au lieu des $c_{n,1}$ les séries infinies correspondantes, nous trouvons pour le coefficient du terme

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r-1}$$

cette expression

$$\frac{x}{r^2} + \frac{x^2}{r^3} + \frac{x^3}{r^4} + \cdots = \frac{x}{r(r-x)} = \frac{1}{r-x} - \frac{1}{r},$$

et nous aurons finalement, après avoir posé $1-x$ au lieu de x, cette formule

$$(s_1(x))^2 = s_2(x) - s_2 + 2\,\xi(x), \tag{23}$$

où nous aurons posé pour abréger

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right). \tag{23bis}$$

La formule (23) n'est démontrée pour le moment que si $|x| < 1$, il est vrai; or, les deux membres de cette formule représentent des fonctions holomorphes dans toute l'étendue du plan des x, à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \ldots$; c'est-à-dire que notre formule susdite est applicable pour une valeur quelconque de x.

Cherchons maintenant directement, d'après la règle de Cauchy le carré du second membre de (1), nous aurons, en vertu de (23), pour la fonction

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}\right) \tag{24}$$

cette autre expression remarquable

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)(n+1)} - s_2. \tag{24bis}$$

Prenons encore une fois comme point de départ la formule (1bis), nous aurons de la même manière, en appliquant (15bis), cette autre formule

$$s_1(1+x)\,s_1(1-x) = -2 \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} (c_{2n-1,1} + s_{2n})\,x^{2n-2},$$

de sorte que l'identité

$$s_1(1+x) = s_1(x) - \frac{1}{x}$$

donnera immédiatement

$$s_1(x)\,s_1(1-x) = -2 \cdot \sum_2^{\infty} c_{2n-1,1}\,x^{2n-2} - \sum_2^{\infty} (-1)^n s_n\,x^{n-2} + 2\,s_2,$$

d'où, après une légère transformation, cette autre formule remarquable

$$s_1(x)\,s_1(1-x) = 2\,s_2 - \xi(x) - \xi(1-x) \tag{25}$$

Pour trouver les formules correspondantes qui contiennent la fonction $\sigma_1(x)$ prenons pour point de départ la formule (4bis), nous trouvons immédiatement, en vertu de (17),

$$(\sigma_1(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{n=\infty}\Big((n-1)\,s_n + 2\,\gamma_{1,n-1} - 2\,\sigma_n\Big)x^{n-2},$$

d'où, en posant $1-x$ au lieu de x, cette autre formule générale

$$(\sigma_1(x))^2 = s_2(x) - 2\,\eta(x), \tag{26}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}\right). \tag{26^{bis}}$$

Appliquons maintenant la formule (17bis), nous aurons de même

$$\sigma_1(1+x)\,\sigma_1(1-x) = 2\cdot\sum_1^\infty \gamma_{1,2n-1}\,.\,x^{2n-2},$$

de sorte que l'identité

$$\sigma_1(1+x) = \frac{1}{x} - \sigma_1(x)$$

donnera, après une légère transformation

$$\sigma_1(x)\,\sigma_1(1-x) = \eta(x) + \eta(1-x). \tag{27}$$

Enfin, pour évaluer le produit $s_1(x)\,\sigma_1(x)$, appliquons ces deux identités

$$2\,s_1(x) + 2\,\sigma_1 = s_1\left(\frac{x}{2}\right) + s_1\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$2\,\sigma_1(x) = s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (23),

$$s_1(x)\,\sigma_1(x) = \sigma_2(x) - \sigma_1\,.\,\sigma_1(x) - \frac{1}{2}\,\xi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\xi\left(\frac{x+1}{2}\right). \tag{28}$$

De la même manière nous aurons, à l'aide de (13bis), cette dernière formule de ce genre

$$s_1(x)\,\sigma_1(1-x) = \sigma_1\,.\,\sigma_1(x) - \xi_1(1-x) + \xi_2(x), \tag{29}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(x) &= \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ \xi_2(x) &= \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29^{bis}}$$

Certainement, les six produits que nous venons d'évaluer nous fournissent un simple moyen pour généraliser beaucoup les formules numériques données dans la section III. Différentions par exemple $(n-2)$ fois par rapport à x la formule (23), nous aurons

$$\sum_{1}^{n-1} s_r(x)\, s_{n-r}(x) = (n-1)\, s_n(x) -$$

$$-2 \cdot \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{(x+r)^{n-1}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} \right),$$

formule qui, pour $x = 1$, donnera immédiatement la relation (15).

De la même manière nous obtenons de (26) et de (27) ces deux autres formules

$$\sum_{1}^{n-1} \sigma_r(x)\, \sigma_{n-r}(x) = (n-1)\, s_n(x) - \frac{(-1)^n \cdot 2}{(n-2)!} \cdot D_x^{n-2}\, \eta(x)$$

$$\sum_{1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sigma_{n-r}(x)\, \sigma_r(1-x) = \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \left(D_x^{n-2}\, \eta(x) + D_x^{n-2}\, \eta(1-x) \right);$$

posons dans ces formules $x = \frac{1}{2}$ et $2n$ au lieu de n, nous aurons pour cette série numérique

$$\tau_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sigma_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdots, \qquad n \geqq 1$$

cette formule récursive

$$\sum_{0}^{n-1} \tau_{2r+1} \cdot \tau_{2n-2r-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) t_{2n}. \tag{30}$$

Remarquons encore que (28) et (29) donnent respectivement ces deux autres formules

$$\sum_{1}^{n-1} s_r(x)\, \sigma_{n-r}(x) = (n-1)\, \sigma_n(x) - \sigma_1 \cdot \sigma_{n-1}(x) -$$

$$- \frac{(-1)^n}{2\,(n-2)!} \left(D_x^{n-2}\, \xi\left(\frac{x}{2}\right) - D_x^{n-2}\, \xi\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

$$\sum_{1}^{n-1} (-1)^{r-1} s_{n-r}(x)\, \sigma_r(1-x) = \sigma_1 \cdot \sigma_{n-1}(x) -$$

$$- \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \left(D_x^{n-2}\, \xi_1(1-x) - D_x^{n-2}\, \xi_2(x) \right),$$

nous aurons cette autre relation numérique

$$\sum_{0}^{n-1} \tau_{2r+1} \cdot t_{2n-2r} = n \cdot \tau_{2n+1} \cdot \qquad (30^{\text{bis}})$$

L'analogie entre les formules que nous venons d'indiquer et celles de la section III est évidente; cependant, l'essay de trouver pour $s_n(x)$ ou $\sigma_n(x)$ des formules récursives analogues à (16), (18) et (20) doit être désigné à l'avance comme infructueux. En effet, M. Hölder (*) a démontré que la fonction de Gauss $\Psi(x)$, ou ce qui revient au même, la fonction $s_1(x)$ ne peut satisfaire à aucune équation différentielle algébrique, et M. Stadigh (**) a démontré récemment, par une méthode analogue, que la fonction

$$s_1\left(\frac{x}{2}\right) + s_1\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

possède la même propriété; de plus, il et évident que la même démonstration peut être appliquée à la fonction

$$2\,\sigma_1(x) = s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

aussi.

V. Expressions intégrales des six produits de deux fonctions $s_1(x)$ ou $\sigma_1(x)$.

Pour établir, à l'aide des formules de la section IV, des expressions intégrales pour les six produits de deux fonctions $s_1(x)$ ou $\sigma_1(x)$ appliquons cette méthode générale: Supposons égal à un au moins le rayon de convergence de cette série de puissances

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots, \qquad (31)$$

et supposons de plus que cette série

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \cdots,$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. 28, p. 7.

(**) *Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen*, p. 32, (Thèse de doctorat, Helsingfors, 1902).

nous aurons, en appliquant un théorème bien connu (*), cette formule fondamentale dans les recherches qui nous occupent ici

$$\int_0^1 f(t)\, t^{x-1}\, d\, t = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \cdots, \qquad \Re(x) > 0. \qquad (31^{\text{bis}})$$

De plus, il est clair que la série infinie figurant au second membre de (31bis) est convergente dans toute l'étendue du plan des x, à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \ldots$, où un des termes de la série susdite deviendra infini.

Pour appliquer maintenant à la fonction $\xi(x)$, définie par (23bis), notre méthode générale, il s'agit d'étudier cette série de puissances

$$f(t) = \frac{1}{1}\, t + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) t^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) t^3 + \cdots, \qquad |t| < 1,$$

ce qui donnera immédiatement

$$f(t) = \frac{1}{1} \cdot \frac{t}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1-t} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{1-t} + \cdots = -\frac{1}{1-t} \cdot \log(1-t),$$

de sorte que nous obtenons cette expressions intégrale

$$\xi(x) = -\int_0^1 \frac{(t^{x-1} - 1)\log(1-t)}{1-t}\, d\, t, \qquad \Re(x) > 0, \qquad (32)$$

d'où, en vertu de (3bis) et (23),

$$(s_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{(t^{x-1} - 1)(2\log(1-t) - \log t)}{1-t}\, d\, t, \qquad \Re(x) > 0, \qquad (33)$$

tandis que (25) donnera de même cette expression correspondante

$$s_1(x)\, s_1(1-x) = \int_0^1 \frac{(t^{x-1} + t^{-x} - 2)\log(1-t) - \log t}{1-t}\, d\, t, \qquad 2 > \Re(x) > 0 \quad (34)$$

(*) Voir M. Dini: *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*, p. 525; Leipsic, 1892.

enfin les formules (6bis) et (22) donneront cette troisième formule analogue

$$\left.\begin{array}{l} s_1(x)\,\sigma_1(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_0^1 \frac{(t^{\frac{x}{2}-1} - t^{\frac{x-1}{2}})\log(1-t)}{1-t}\,dt - \\ \quad -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}\log(2t)}{1+t}\,dt, \qquad \Re(x) > 0. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Considerons ensuite la fonction $\eta(x)$, nous trouverons cette série de puissances

$$f(t) = \log 2 + \left(\log 2 - \frac{1}{1}\right)t + \left(\log 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)t^2 + \cdots$$

on bien

$$f(t) = (1 + t + t^2 + \cdots)\log 2 - (t + t^3 + \cdots)\frac{1}{1} + (t^2 + t^3 + \cdots)\frac{1}{2} - \cdots,$$

ce qui donnera

$$f(t) = \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t},$$

d'où cette expression intégrale

$$\eta(x) = \int_0^1 \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t}\cdot t^{x-1}\,dt, \qquad \Re(x) > 0, \tag{36}$$

et nous obtenons par suite, en vertu de (3bis) et de (26),

$$(\sigma_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{2\log(1+t) - 2\log 2 - \log t}{1-t}\cdot t^{x-1}\,dt, \qquad \Re(x) > 0, \tag{37}$$

tandis que (27) donnera cette formule analogue

$$\sigma_1(x)\,\sigma_1(1-x) = \int_0^1 \frac{(\log 2 - \log(1+t))(t^{x-1} + t^{-x})}{1-t}\,dt, \qquad 1 > \Re(x) > 0. \tag{38}$$

Nous avons encore à étudier les deux fonctions $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$; considérons d'abord $\xi_1(x)$, la fonction $f(t)$ correspondante se détermine à l'aide de cette série

$$f(t) = \frac{1}{1}\cdot t - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\cdot t^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)t^3 - \cdots;$$

c'est-à-dire que nous aurons

$$f(t) = \frac{1}{1} \cdot \frac{t}{1+t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1+t} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{1+t} - \cdots = \frac{\log(1+t)}{1+t},$$

de sorte que nous obtenons

$$\xi_1(x) = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t} \cdot t^{x-1}\, d\,t, \qquad \Re(x) > -1. \tag{39}$$

Quant à la fonction $\xi_2(x)$, nous aurons

$$f(t) = \frac{1}{1}\, t - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) t^2 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) t^3 - \cdots$$

ou bien

$$f(t) = \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{1+t} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{1+t} + \cdots = -\frac{\log(1+t)}{1+t},$$

ce qui donnera

$$\xi_2(x) = -\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{1+1} \cdot t^{x-1}\, d\,t, \qquad \Re(x) > -1. \tag{40}$$

Cela posé, la formule (29) donnera, en vertu de (6bis),

$$\left.\begin{aligned} & s_1(x)\,\sigma_1(1-x) = \\ = & \int_0^1 \frac{(\log 2 + \log(1-t))\, t^{x-1} - \log(1+t) \,.\, t^{-x}}{1+t}\, d\,t, \qquad 2 > \Re(x) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Enfin, nous avons à étudier la fonction $\rho(x)$ définie par (24bis), ce qui nous conduira à cette fonction auxiliaire

$$f(t) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{3}\, t^2 + \frac{1}{4}\, t^3 + \cdots = -\frac{\log(1-t)}{t},$$

d'où, nous obtiendrons, en vertu de (3bis),

$$\rho(x) = \int_0^1 \left(\frac{\log t}{1-t} - \log(1-t) \,.\, t^{x-2}\right) d\,t, \qquad \Re(x) > 0. \tag{42}$$

VI. Développements en séries de factorielles.

Les expressions intégrales que nous venons de développer pour nos fonctions nous fournissent un moyen infaillible pour décider si une telle fonction est développable ou non en série de factorielles de cette forme

$$\Omega(x) = \frac{b_0}{x} + \frac{1!\,b_1}{x(x+1)} + \frac{2!\,b_2}{x(x+1)(x+2)} + \cdots, \tag{α}$$

où les coefficients b sont indépendants de x, et de plus les mêmes intégrales nous permettent de déduire ce développement, s'il est possible.

En effet, dans un mémoire récent (*) j'ai démontré que la condition suffisante et nécessaire qui doit être remplie par une fonction développable en série de la forme (α) est que la fonction en question se présente sous cette forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 f(t) \,.\, t^{x-1}\, d\, t, \tag{β}$$

où la fonction $f(t)$ doit être holomorphe aux environs du point $t=1$ et cela de sorte que la série de puissances

$$f(1-t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^n n!\, b_n, \tag{γ}$$

a son rayon de convergence égal à un au moins, et, de plus, cette fonction $f(t)$ doit satisfaire à quelques autres conditions faciles à indiquer mais sans influence sur la question qui nous occupe ici.

Cela posé, on verra sur-le-champ que la condition (γ) est en défaut pour $\xi(x)$, $\xi_2(x)$ et $\rho(x)$ et pour toutes leurs dérivées, parce que les fonctions correspondantes $f(t)$ possèdent en $t=1$ un point critique.

Pour développer en série de factorielles la fonction $\eta(x)$, écrivons sous cette forme l'expression intégrale (36)

$$\eta(x) = -\int_0^1 \frac{\log\left(1-\dfrac{t}{2}\right)}{t} (1-t)^{x-1}\, d\, t = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s \cdot 2^s} \cdot \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{x-1}\, d\, t$$

(*) *Annales de l'École Normale.* 3.e série, t. 19, p. 419. Paris, 1902.

ce qui donnera immédiatement cette série de factorielles

$$\eta(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(s-1)!}{s \cdot 2^s} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s-1)} \tag{43}$$

qui est valable dans toute l'étendue du plan des x.

Nous aurons de la même manière, en vertu de (3bis), cet autre développement

$$s_2(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(s-1)!}{s} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0, \tag{44}$$

d'où, en vertu de (26),

$$(\sigma_1(x))^2 = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{2^{s-1}-1}{s \cdot 2^{s-1}} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0. \tag{45}$$

Quant à la fonction $\xi_1(x)$, il s'agit de déterminer ce coefficient

$$f^{(n)}(2), \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{\log t}{t};$$

or, un calcul direct donnera, à l'aide de la formule de Leibnitz,

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}} (\log t - \lambda(n)),$$

où nous avons posé pour abréger $\lambda(0) = 0$ et généralement pour $n \geq 1$

$$\lambda(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n};$$

cela posé, les formules générales (α) et (γ) donnent ici

$$\xi_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{\log 2 - \lambda(s)}{x(x+1)\dots(x+s)}, \tag{46}$$

développement qui est valable dans toute l'étendue du plan des x. Remarquons que nous aurons

$$\sigma_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s)},$$

la formule (46) s'écrira sous cette forme aussi

$$\sigma_1(x) \log 2 - \xi_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{\lambda(s)}{x(x+1)\dots(x+s)}. \tag{46bis}$$

Considérons maintenant les séries de factorielles d'une forme entièrement

différente de (α) que M. **Pincherle** (*) a étudiées récemment. Pour l'intégrale (β) on obtiendra de tels développements en posant dans cette intégrale $1-t$ au lieu de t, ce qui donnera

$$\Omega(1-x)=\int_0^1 f(1-t)(1-t)^{-x}\,d\,t; \qquad (\delta)$$

cela posé, supposons intégrable de $t=0$ à $t=1$ la fonction $f(1-t)$, une application de la formule du binome donnera immédiatement ce developpement

$$\Omega(1-x)=\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\binom{x}{s}, \qquad (\varepsilon)$$

où nous avons posé pour abréger

$$a_s=\int_0^1 f(1-t)\,t^s\,d\,t. \qquad (\xi)$$

L'application de ces formules générales aux fonctions particulières que nous venons d'introduire est évidente; considérons d'abord $\xi(1-x)$, nous aurons immédiatement

$$a_0=0 \quad a_s=-\int_0^1 t^{s-1}\log t\,d\,t=\frac{1}{s^2},$$

ce qui donnera

$$\xi(1-x)=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2}\cdot\binom{x}{s}, \qquad \Re(x)<1, \qquad (47)$$

tandis que nous aurons pour $s_2(1-x)$ ces coefficients

$$a_s=-\int_0^1 t^{s-1}\log(1-t)\,d\,t=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n(n+s)},$$

ou bien

$$a_0=\frac{\pi^2}{6}, \quad a_s=\frac{1}{s}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right)=\frac{1}{s}\cdot\lambda(s),$$

de façon que nous obtiendrons

$$s_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\lambda(s)}{s}\cdot\binom{x}{s}, \qquad \Re(x)<1. \qquad (48)$$

(*) *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei,* serie 5.ª, t. 11, p. 139, p. 417; 1902.

Ces deux développements trouvés, nous aurons immédiatement, en vertu de (23), cet autre

$$(s_1(1-x))^2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}\left(\lambda(s) - \frac{2}{s}\right) \cdot \binom{x}{s}. \tag{49}$$

Quant à la fonction $\eta(1-x)$, nous aurons

$$a_s = -\int_0^1 \log\left(1-\frac{t}{2}\right) t^{s-1}\, dt = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+s)} \cdot \frac{1}{2^n},$$

d'où, eu vertu d'une formule de Legendre (*),

$$a_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

et plus généralement pour $s \geq 1$

$$a_s = \frac{1}{s} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2^s}{s}\mu(s) - \frac{2^s-1}{s}\log 2,$$

où nous avons posé pour abréger $\mu(0) = 0$ et, pour $s \geq 1$,

$$\mu(s) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2^s}.$$

Cela posé, nous aurons

$$\eta(1-x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}\left(2^s \mu(s) - (2^s-1)\log 2\right) \cdot \binom{x}{s}, \tag{50}$$

où, en vertu de (26) et (48), cet autre développement

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_1(1-x))^2 = (\log 2)^2 + \\ &+ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}\left(\lambda(s) - 2^{s+1}\mu(s) + (2^{s+1}-2)\log 2\right) \cdot \binom{x}{s}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Le développement correspondant pour $\xi_1(1-x)$ deviendra plus compliqué; pour la fonction $\xi_2(1-x)$ nous trouvons, au contraire, ce coefficient général

$$a_s = -\int_0^1 \frac{\log t}{2-t} \cdot t^s\, dt = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(n+s)^2},$$

(*) *Exercices de calcul différentiel et intégral,* t. II, p. 244.

d'où, en vertu de la formule de LEGENDRE,

$$a_s = 2^s\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \mu_1(s)\right),$$

où nous avons posé pour abréger $\mu_1(0) = 0$ et plus généralement, pour $s \geq 1$,

$$\mu_1(s) = \frac{1}{1^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{2^s},$$

ce qui donnera

$$\xi_2(1-x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} 2^s\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \mu_1(s)\right)\cdot\binom{x}{s}. \tag{52}$$

Considérons maintenant la dernière des fonctions particulières que nous avons introduites, savoir la fonction $\rho(1-x)$, nous aurons sans peine ce développement nouveau

$$\rho(1-x) = \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{s^2}\right)\cdot\binom{x}{s}. \tag{53}$$

En terminant ces recherches nous avons encore à donner quelques développements qui contiennent des séries de factorielles et du premier et du second genre. En premier lieu, la formule (27) donnera, en vertu de (43) et (50), ce développement

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1(x)\sigma_1(1-x) = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(s-1)!}{s\,.\,2^s}\cdot\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+s-1)} + \\ + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s}\left(2^s\mu(s) - (2^s-1)\log 2\right)\cdot\binom{x}{s}.\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Écrivons encore sous cette forme la formule (29)

$$s_1(1-x)\sigma_1(x) = \sigma_1\,.\,\sigma_1(1-x) - \xi_1(x) + \xi_2(1-x).$$

il s'agit d'abord de développer la fonction $\sigma_1(1-x)$; or, nous trouvons, en vertu de (6),

$$a_s = \int_0^1 \frac{t^s}{2-t}\,dt = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{s+n} = 2^s\left(\log 2 - \mu(s)\right),$$

d'où

$$\sigma_1\,.\,\sigma_1(1-x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} 2^s\left((\log 2)^2 - \mu(s)\log 2\right)\cdot\binom{x}{s},$$

de sorte que nous obtiendrons finalement, en vertu de (46) et (52), ce développement

$$\left.\begin{aligned} s_1(1-x)\,\sigma_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} 2^s \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \mu(s)\log 2 - \mu_1(s)\right) \cdot \binom{x}{s} - \\ - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{\log 2 - \lambda(s)}{x(x+1)\dots(x+s)}. \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Copenhague, le 19 avril 1903.

Note sur quelques séries de puissances trouvées dans la théorie de la fonction gamma.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

I. Séries de puissances obtenues pour $\Gamma(1+x)$ et pour $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$.

Posons pour abréger

$$\Gamma(x) = e^{\gamma(x)}, \tag{1}$$

nous aurons, pour $n = 1$,

$$-\overset{(1)}{\gamma}(x) = -D_x \log \Gamma(x) = C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1} \right) = s_1(x) \ (^*), \tag{2}$$

où C désigne la constante d'Euler, et plus généralement, pour $n \geq 2$,

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \overset{(n)}{\gamma}(x) = s_n(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \cdots, \tag{2bis}$$

de plus nous posons

$$s_1 = C = s_1(1), \quad s_n = s_n(1) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \tag{3}$$

On sait que $\Gamma(1+x)$ est holomorphe aux environs du point $x = 0$ et que la série de puissances correspondante, savoir la série

$$\Gamma(1+x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{4}$$

a son rayon de convergence égal à un.

(*) On voit que cette définition de $s_1(x)$ est un peu différente de celle que j'ai appliquée dans mon mémoire précédent dans ce même volume, p. 189.

Pour déterminer l'expression développée du coefficient général a_n figurant au second membre de (4) appliquons cette formule due à feu M. R. Hoppe (*)

$$D_x^n F(y) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot \overset{k,n}{T}(x) \overset{(n)}{F}(y)$$

où $y = f(x)$, et où nous avons posé pour abréger

$$\overset{k,n}{T}(y) = \sum_{s=0}^{s=k} (-1)^s \binom{k}{s} y^s D_x^n (y^{k-s}).$$

Or, dans le cas particulier qui nous occupe ici, où $F(y) = e^y$, cette formule générale se simplifie beaucoup. En effet, il est évident que l'expression $\overset{k,n}{T}(x)$ ne peut pas contenir la fonction y elle-même; c'est-à-dire que la formule polynomiale symbolique pour l'évaluation de

$$D_x^n (y_1 y_2 y_3 \dots y_k)$$

donnera dans ce cas

$$\overset{k,n}{T}(y) = n! \, \Sigma \frac{y^{(r_1)} y^{(r_2)} \dots y^{(r_k)}}{r_1! \, r_2! \dots r_k!},$$

où la sommation qui figure au second membre doit être étendue à toutes les combinaisons possibles des k nombres *positifs* entiers

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_k$$

qui satisfont à cette seule condition

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k = n.$$

Posons maintenant $y = \gamma(x)$, nous aurons, en vertu de (2) et (2bis),

$$\overset{k,n}{T}(y) = (-1)^n n! \, \Sigma \frac{s_{r_1}(x) s_{r_2}(x) \dots s_{r_k}(x)}{r_1 . r_2 . r_3 \dots r_k} = (-1)^n n! \, \overset{k,n}{V}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\overset{k,n}{V}(x) = \Sigma \frac{s_{r_1}(x) s_{r_2}(x) \dots s_{r_k}(x)}{r_1 . r_2 . r_3 \dots r_k},$$

et nous obtenons finalement cette formule générale

$$\overset{(n)}{\Gamma}(x) = (-1)^n n! \, \Gamma(x) \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot \overset{k,n}{V}(x), \tag{5}$$

(*) *Théorie der höheren Differentialquotienten*, Leipsic, 1845. — Voir aussi: Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 6, Brunswick, 1879.

ce qui donnera pour le coefficient c_n cette expression

$$C_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot \overset{k,n}{V}(1), \tag{6}$$

où nous avons par conséquent

$$\overset{k,n}{V}(1) = \Sigma \frac{s_{r_1} s_{r_2} \ldots s_{r_k}}{r_1 \cdot r_2 \ldots r_k}. \tag{6bis}$$

Considérons ensuite cette autre fonction

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x \Gamma(x)} = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma(x)}, \tag{7}$$

la formule de Leibnitz donnera cette formule différentielle générale

$$D_x^n \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)}\right) + \frac{n}{x} \cdot D_x^{n-1} \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)}\right) = \frac{1}{x} \cdot D_x^n e^{-\gamma(x)}. \tag{8}$$

En effet multiplions par x les deux membre de (7), puis différentions n fois par rapport à x, une nouvelle division par cette variable nous conduira immédiatement à (8).

Appliquons maintenant la méthode que nous venons d'indiquer, nous aurons sans peine

$$D_x^n \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)}\right)_{x=1} + n \, D_x^{n-1} \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)}\right)_{x=1} =$$
$$= (-1)^n n! \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \overset{k,n}{V}(1),$$

ce qui donnera pour les coefficients généraux de cette série de puissances

$$\frac{1}{\Gamma(2+x)} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots \tag{α}$$

cette relation générale

$$d_n + d_{n-1} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \overset{k,n}{V}(1). \tag{β}$$

Cela posé, multiplions par $(x+1)$ les deux membres de (α), nous aurons, en vertu de (β), pour le coefficient général de cette série de puissances qui est valable dans toute l'étendue du plan des x, savoir la série

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots, \tag{9}$$

cette expression

$$\gamma_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \overset{k,n}{V}(1), \tag{9bis}$$

où $\overset{k,n}{V}(1)$ désigne la quantité définie à l'aide de la formule (6[bis]), de sorte que nous avons démontré ces deux théorèmes dont le premier et bien connu, tandis que le second semble être nouveau :

I. *Les coefficients généraux c_n et γ_n des séries de puissances* (4) *et* (9) *s'expriment sous forme des polynomes entiers et homogènes du dégré n des nombres $s_1 s_2 \ldots s_n$, si nous supposons s_r du dégré r ; les coefficients de ces polynomes sont des nombres rationnels.*

II. *L'expression susdite de γ_n peut être déduite de celle obtenue pour c_n en y posant simplement $-s_r$ au lieu de s_r.*

Les expressions développées (6) et (9 [is]) pour c_n et γ_n qui sont nouvelles peut-être ne sont guère convenables pour un calcul numérique; pour obtenir les valeurs approchées des coefficients susdits ont peut partir de certaines formules récursives, comme l'a fait M. Bourguet (*).

II. Séries de puissances obtenues pour $B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et pour $x \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Il est bien remarquable que les résultats précédents peuvent être étendus à un cas particulier de la fonction beta aussi. En effet, posons

$$B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\beta(x)}, \tag{10}$$

nous aurons, en vertu de (2),

$$-\overset{(1)}{\beta}(x) = \frac{1}{2}\left(s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \sigma_1(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots$$

(*) *Acta Mathematica*, t. II, p. 288, p. 291; 1884.

et plus généralement

$$\sigma_r(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \cdot \overset{(r)}{\beta}(x) = \frac{1}{x^r} - \frac{1}{(x+1)^r} + \frac{1}{(x+2)^r} - \cdots$$

Pour l'argument 1 nous posons encore pour abréger

$$\sigma_r(1) = \sigma_r = \frac{1}{1^r} - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \frac{1}{4^r} + \cdots,$$

ce qui donnera

$$\sigma_1 = \log 2$$

et plus généralement, pour $n \geq 2$,

$$\sigma_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \cdot s_n.$$

Cela posé, considérons cette série de puissances

$$\frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1, \quad (11)$$

nous aurons

$$2\, b_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(D_x^n\, B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)_{x=1},$$

de sorte que le même procédé que nous venons d'appliquer sur la fonction gamma donnera ici pour le coefficient b_n cette expression

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot \overset{k,n}{U}(1), \qquad (12)$$

où nous avons posé pour abréger

$$\overset{k,n}{U}(1) = \sum \frac{\sigma_{r_1}\sigma_{r_2}\ldots\sigma_{r_k}}{r_1 \cdot r_2 \ldots r_k}, \qquad (12^{\text{bis}})$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k = n.$$

Appliquons ensuite cette formule fondamentale $\Gamma(1+x) = x \cdot \Gamma(x)$, nous aurons de même, en vertu de (10),

$$B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{x} \cdot \frac{1}{B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\pi}{x} \cdot e^{-\beta(x)},$$

ce qui donnera cette autre formule analogue à (8)

$$D_x^n\, B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{n}{x} \cdot D_x^{n-1}\, B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{x} \cdot D_x^n\, e^{-\beta(x)},$$

d'où pour $x = 1$

$$D_x^n B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{x=1} + n\, D_x^{n-1} B\left(\frac{x-1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{x=1} =$$

$$= (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \overset{k,n}{U}(1),$$

où $\overset{k,n}{U}(1)$ désigne la quantité que nous venons de définir à l'aide de (12bis).

Considérons maintenant cette autre série de puissances

$$\frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots \qquad |x| < 2, \tag{α}$$

les coefficients d_n doivent satisfaire à cette condition

$$d_n + d_{n-1} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \overset{k,n}{U}(1). \tag{β}$$

Cela posé, cette formule fondamentale

$$B\left(\frac{x+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{x+1} \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{γ}$$

donnera, si nous multiplions par $(x+1)$ les deux membres de (α), cette nouvelle série de puissances

$$\frac{x}{2} \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots, \qquad |x| < 2, \tag{13}$$

dont le coefficient général se détermine par cette formule

$$\beta_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \overset{k,n}{U}(1), \tag{13^{bis}}$$

de sorte que nous avons démontré ces deux théorèmes qui semblent être nouveaux:

III. *Le coefficient β_n de la série de puissances* (13) *peut être formé si nous remplace, dans l'expression obtenue pour γ_n, s_r par σ_r.*

IV. *Le coefficient b_n de la série de puissances* (11) *peut être déduit en multipliant par $\frac{\pi}{2}$ l'expression obtenue de β_n en y posant $-\sigma_r$ au lieu de σ_r.*

Il est évident que les expressions développées que nous venons de donner pour les coefficients généraux b_n et β_n ne sont guère commodes pour un calcul numérique. Cependant, il est très facile de représenter les deux coef-

ficient susdits sous forme d'une série numérique qui peut être calculée approximativement sans peine quand l'indice n et assez grand. Pour déduire de telles séries numériques appliquons cette formule bien connue

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\,t = \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot \qquad \Re(x) > 0,$$

d'ou

$$\int_0^1 \frac{(\log t)^n}{\sqrt{1-t^2}}\,d\,t = \frac{1}{2}\cdot\left(D_x^n B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right)\right)_{x=1}\cdot \qquad (\delta)$$

Cela posé, la formule du binome donnera

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot t^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot t^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot t^6 + \cdots$$

d'où, en vertu de cette formule intégrale, où r désigne un entier non négatif

$$\int_0^1 t^{x-1}(\log t)^r\,d\,t = \frac{(-1)^r\,r\,!}{x^{r+1}}, \qquad \Re(x) > 0,$$

et en appliquant (δ), cette expression nouvelle de b_n

$$(-1)^n\,b_n = \frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7^{n+1}} + \cdots \qquad (14)$$

Nous aurons de même

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)\frac{(\log t)^n}{t}\,d\,t = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{6^{n+1}} + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

et, en vertu de (γ),

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)t^{x-1}\,d\,t = \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x}$$

ce qui donnera, en appliquant la série de puissances (13),

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-1\right)t^{x-1}\,d\,t = \beta_1 + \beta_2\,x + \beta_3\,x^2 + \beta_4\,x^3 + \cdots,$$

de sorte que nous obtiendrons à l'aide de la série numérique (ε), cette représentation nouvelle du coefficient β_n:

$$(-1)^{n-1}\beta_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4^n} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{6^n} + \cdots \tag{15}$$

Les formules (14) (15) donnent précisément les représentations nouvelles des coefficients b_n et β_n que nous avions nous proposé de développer.

Quant aux séries numériques

$$A_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5^n} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7^n} + \cdots$$

$$B_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4^n} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{6^n} + \cdots$$

nous avons, en vertu des théorèmes III et IV, cette proposition remarquable:

V. *La somme de la série numérique B_n est égale à un polynome entier à coefficients rationnels de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ et homogène du dégré n dans ces nombres, si nous supposons σ_r du dégré r. La somme de la série A_n, au contraire, peut être déduite en multipliant par $-\frac{\pi}{2}$ l'expression obtenue de B_{n-1} en y posant $-\sigma_r$ au lieu de σ_r.*

Nous aurons par exemple

$$B_1 = \sigma_1 = \log 2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\log 2,$$

ou, ce qui vaut autant, cette formule *eulérienne*

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\log 2;$$

en effet, pour déduire cette formule nous n'avons qu'à mettre dans (δ) $n = 1$ et $t = \sin\varphi$.

Copenhague, le 25 avril 1903.

Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

§ 1. Formules générales. Points critiques de $L_{n,p}(x)$.

Il est bien connu que Legendre (*), Abel (**), Schaeffers (***), et dans les dernières années, M. W. Kapteyn (****) ont démontré pour cette fonction transcendante

$$L_2(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots, \qquad |x| \leq 1$$

un nombre de propriétés remarquables. Dans la communication que voici je me suis proposé d'étudier certaines généralisations de cette fonction célèbre $L_2(x)$, de démontrer que les fonctions en question sont holomorphes dans toute l'étendue du plan des x, à l'exception des deux points critiques transcendants $x = 1$ et $x = \infty$, de plus j'ai à indiquer les branches différentes des fonctions susdites et de donner enfin un nombre de propriétés intéressantes des valeurs obtenues de nos fonctions en y posant $x = 1$, $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$.

Pour construir la généralisation en question de $L_2(x)$ définissons comme ordinairement, à l'aide de cette identité,

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} x$$

les coefficients de la factorielle du rang n, puis posons

$$\omega_{n-1}^{n-p-1} = \frac{C_n^p}{(n-1)!},$$

(*) *Exercices de calcul intégral*, t. II, p. 244.

(**) *Œuvres complètes*, t. II, p. 189.

(***) *Journal de Crelle*, t. 30.

(****) *Nieuw Archief*, 2° Série, t. 3, p. 225-229; 1897, p. 283-284; 1898.

nous aurons partiarlièrement

$$\omega_n^0 = 1, \qquad \omega_n^1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \qquad \omega_n^n = \frac{1}{n!},$$

tandis que généralement ω_n^p désigne la somme de tous les $\binom{n}{p}$ produits à p facteurs différents choisis parmi ces n nombres

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n},$$

nous aurons pour le coefficient du binome cette expression

$$\binom{x+n-1}{n} = \frac{x}{n} \cdot \left(\omega_{n-1}^{n-1} \cdot x^{n-1} + \omega_{n-1}^{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + \omega_{n-1}\right), \tag{1}$$

tandis qu'une formule bien connue (*) s'écrira sous cette forme nouvelle

$$(\log(1-x))^p = (-1)^p\, p! \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{p+s-1}^{p-1}}{p+s} \cdot x^{p+s}, \qquad |x| < 1, \tag{2}$$

où p désigne un positif entier.

Introduisons maintenant cette fonction beaucoup plus générale que $L_2(x)$

$$L_{n,p}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{p+s-1}^{p-1}}{(p+s)^{n+1}} \cdot x^{p+s}, \qquad |x| \leq 1,$$

nous aurons particulièrement

$$L_{0,p}(x) = \frac{(-1)^p}{p!} \cdot (\log(1-x))^p, \tag{3}$$

tandis que nous posons

$$L_n(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^n},$$

ce qui donnera cette autre formule particulière

$$L_{n,1}(x) = L_{n+1}(x). \tag{3bis}$$

Cela posé, appliquons cette formule intégrale

$$\int_0^1 t^{q-1} (\log t)^r\, dt = \frac{(-1)^r\, r!}{q^{r+1}},$$

(*) Voir par exemple SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 13.

où r désigne un entier non negatif, nous aurons, en vertu de (2), cette expression nouvelle pour la fonction $L_{n,p}(x)$

$$L_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{p!\,(n-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log(1-tx))^p (\log t)^{n-1}}{t}\, d\,t, \qquad |x| < 1, \tag{4}$$

où le chemin d'intégration est la partie de l'axe des nombres positifs située entre $t=0$ et $t=1$. Or, cette expression intégral que nous venons de donner se transforme par une intégration par parties; nous aurons en effet

$$L_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+p-1}\,.\,x}{n!\,(p-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log(1-tx))^{p-1} (\log t)^n}{1-tx}\, d\,t, \tag{4bis}$$

où le chemin d'intégration est toujours la même partie de l'axe des nombres positifs.

Il est évident que la formule (4) nous fournit un simple moyen pour le prolongement analytique de la fonction $L_{n,p}(x)$ qui n'est définie que pour $|x| \leq 1$. En effet, dans ce cas l'intégrale susdite représente précisément la série de puissances que nous avons prise comme définition de $L_{n,p}(x)$; pour $p \geq 1$ et $|x| > 1$ la même intégrale a toujours une valeur finie et déterminée. Démontrons encore que la fonction de x représentée par cette intégrale est analytique aussi.

Or, la verité de cette assertion est une conséquence immédiate de la forme même de l'intégrale susdite. En effet, nous aurons, en vertu de (4bis), pour la dérivée de $L_{n,p}(x)$ cette expression

$$D_x L_{n,p}(x) = \frac{1}{x} \cdot L_{n-1,p}(x), \tag{5}$$

formule qui est certainement valable pour une valeur finie quelconque de x, les valeurs positives et plus grandes que ou égales à 1 exceptées, car dans ce cas l'intégrale figurant au second membre de (4bis) deviendra illusoire. Appliquons maintenant plusieurs fois la formule (5), nous trouvons

$$D_x L_{1,p}(x) = \frac{1}{x} \cdot L_{0,p}(x) = \frac{(-1)^p}{p!} \cdot \frac{1}{x} \cdot (\log(1-x))^p, \tag{5bis}$$

ce qui montre clairement que la fonction $L_{n,p}(x)$ est analytique dans toute partie finie du plan des x, à l'exception du point $x=1$ qui est certainement point critique de notre fonction parce que ses dérivées d'un ordre fini mais suffisamment grand deviendront infinies pour cette valeur de x.

Avant d'étudier la nature de ce point critique introduisons les séries numériques obtenues de $L_{n,p}(x)$ en y posant $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, séries qui sont très remarquables. Posons pour abréger

$$L_{n,p}(1) = s_{n,p}, \qquad L_{n,p}(-1) = \sigma_{n,p}, \qquad L_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) = a_{n,p},$$

nous aurons particulièrement

$$s_{n,1} = s_{n+1} = \frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots, \qquad n \geqq 1$$

$$-\sigma_{n,1} = \sigma_{n+1} = \frac{1}{1^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} - \cdots, \qquad n \geqq 0$$

$$a_{n,1} = a_{n+1} = \frac{1}{1^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots, \qquad n \geqq 0.$$

La série $s_{0,p}$ est divergente; pour $\sigma_{0,p}$ et $a_{0,p}$ nous obtenons, au contraire, en vertu de (3), ces expressions

$$\left.\begin{aligned} (-1)^p \sigma_{0,p} = a_{0,p} = \frac{1}{p!} \cdot (\log 2)^p \\ a_1 = \sigma_1 = \log 2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Posons encore dans (4bis) $x = 1$ et transformons l'intégrale ainsi obtenue en mettant $1 - t$ au lieu de t, nous trouvons cette égalité

$$s_{n,p} = s_{p,n}. \tag{6^{bis}}$$

§ 2. Branches différentes de $L_{n,p}(x)$.

Pour déterminer maintenant la nature du point critique $x = 1$ de $L_{n,p}(x)$, mettons dans (4) tx au lieu de t, nous aurons cette autre expression intégrale

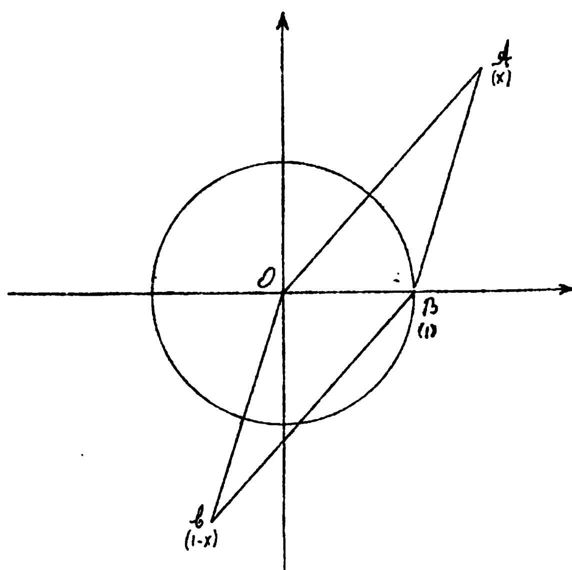
$$L_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+p-1}}{p!\,(n-1)!} \cdot \int_0^x \frac{(\log(1-t))^p (\log t - \log x)^{n-1}}{t}\, d\,t, \tag{7}$$

où le chemin d'intégration est représenté par la ligne droite OA qui unit

les deux points $t=0$ et $t=x$. Appliquons ensuite la formule du binome, et introduisons cette fonction nouvelle

$$M_{n,p}(x)=\frac{(-1)^{n+p-1}}{p!\,(n-1)!}\cdot\int_0^x\frac{(\log(1-t))^p\,(\log t)^{n-1}}{t}\,dt,$$

où le chemin d'intégration est toujours la même ligne droite OA, nous aurons, en vertu de (7), cette autre formule



$$L_{n,p}(x)=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(\log x)^s}{s!}\cdot M_{n-s,p}(x), \tag{8}$$

d'où plus particulièrement

$$\left.\begin{array}{c} L_{1,p}(x)=M_{1,p}(x) \\ L_{n,p}(1)=M_{n,p}(1)=s_{n,p}\,. \end{array}\right\} \tag{8bis}$$

Inversement, il est très facile d'exprimer la fonction $M_{n,p}(x)$ sous forme d'une fonction linéaire et homogène de

$$L_{n,p}(x),\quad L_{n-1,p}(x),\quad L_{n-2,p}(x),\ldots L_{1,p}(x).$$

En effet, cette expression peut être déduite directement de (8) et des formules analogues qui correspondent aux valeurs plus petites de n. Or, cette

identité nous conduira plus facilement au but

$$\int_0^x t^{q-1} (\log t)^r\, dt = x^q \cdot \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^r\, r!}{(r-s)!} \cdot \frac{(\log x)^{r-s}}{q^{s+1}};$$

nous aurons en effet immédiatement, en vertu de (2),

$$M_{n,p}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (\log x)^s}{s!} \cdot L_{n-s,p}(x), \tag{9}$$

formule qui montre clairement que, pour $n > 1$, la fonction $M_{n,p}(x)$ est analytique dans toute l'étendue du plan des x, à l'exception des points $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ qui sont des points critiques pour cette fonction.

Posons dans (9) $x = \frac{1}{2}$, nous aurons cette formule particulière

$$M_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\sigma_1^s}{s!} \cdot a_{n-s,p}. \tag{9^{bis}}$$

Transformons maintenant par une intégration par parties la définition intégrale de $M_{n,p}(x)$, nous aurons immédiatement

$$\left.\begin{aligned} M_{n,p}(x) &= \frac{(-1)^{n+p-1}}{n!\,p!} (\log x)^n (\log(1-x))^p + \\ &+ \frac{(-1)^{n+p-1}}{n!\,(p-1)!} \int_0^x \frac{(\log(1-t))^{p-1} (\log t)^n}{1-t}\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

d'où, en posant dans la nouvelle intégrale ainsi obtenue $1-t$ au lieu de t, cette autre formule

$$\left.\begin{aligned} M_{n,p}(x) &= \frac{(-1)^{n+p-1}}{n!\,p!} \cdot (\log x)^n (\log(1-x))^p + \\ &+ \frac{(-1)^{n+p-1}}{n!\,(p-1)!} \cdot \int_{1-x}^1 \frac{(\log t)^{p-1} (\log(1-t))^n}{t}\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

où le chemin d'intégration est la ligne droite OC qui unit les deux points $t = 1-x$ et $t = 1$. Or, intégrons dans le sens direct le long du périmètre du triangle OCB la fonction

$$\frac{(\log t)^{p-1} (\log(1-t))^n}{t},$$

nous aurons, en vertu du théorème fondamental de Cauchy

$$\int_{OC} + \int_{CB} + \int_{BO} = 0, \qquad \int_{CB} = \int_{OB} - \int_{OC},$$

de sorte que nous obtenons pour la fonction $M_{n,p}(x)$ cette équation fondamentale

$$M_{n,p}(x) + M_{p,n}(1-x) = s_{n,p} + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n!\,p!} \cdot (\log x)^n \Big(\log(1-x)\Big)^p, \tag{10}$$

dont le cas $n = p = 1$, qui conduira à $L_2(x)$, appartient à Legendre.

Posons particulièrement dans (10) $x = \frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (9bis), cette relation numérique

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\sigma_1^r}{r!} \cdot a_{n-r,p} + \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{\sigma_1^r}{r!} \cdot a_{p-r,n} = s_{n,p} - \frac{\sigma_1^{n+p}}{n!\,p!}, \tag{11}$$

on bien, en vertu de (6),

$$\sum_{r=0}^{r=n} \frac{\sigma_1^r}{r!} \cdot a_{n-r,p} + \sum_{r=0}^{r=p} \frac{\sigma_1^r}{r!} \cdot a_{p-r,n} = s_{n,p} + \frac{\sigma_1^{n+p}}{n!\,p!}; \tag{11^{bis}}$$

posons encore dans (11) $p = 1$, nous aurons

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{\sigma_1^r}{r!} a_{n-r} + a_{1,n-1} = s_n - \frac{\sigma_1^n}{(n-1)!}, \tag{12}$$

dont le cas particulier $n = 2$, c'est-à-dire la formule

$$a_2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2, \tag{12^{bis}}$$

appartient à Legendre.

Introduisons maintenant dans (8), au lieu des $M_{n,p}(x)$, les expressions tirées de (10), nous obtiendrons, d'après une propriété bien connue des coefficient du binome :

$$\left. \begin{aligned} L_{n,p}(x) = \frac{(-1)^p}{n!\,p!} \cdot (\log x)^n \Big(\log(1-x)\Big)^p + \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(\log x)^r}{r!} \cdot s_{n-r,p} - \\ - \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(\log x)^r}{r!} \cdot M_{p,n-r}(1-x), \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

d'où, en vertu de (9), cette formule plus compliquée

$$\left. \begin{array}{l} L_{n,p}(x) = \dfrac{(-1)^p}{n!\,p!} \cdot (\log x)^n \left(\log(1-x)\right)^p + \sum\limits_{r=0}^{r=n-1} \dfrac{(\log x)^r}{r!} \cdot s_{n-r,p} - \\ - \sum\limits_{s=0}^{s=n-1} \dfrac{(\log x)^s}{s!} \cdot \sum\limits_{r=0}^{r=p-1} \dfrac{(-1)^r \left(\log(1-x)\right)^r}{r!} \cdot L_{p-r,n-s}(1-x). \end{array} \right\} \quad (13^{\text{bis}})$$

Considérons en particulier le cas $p = 1$, nous obtiendrons cette équation fondamentale plus élégante

$$L_{n+1}(x) = \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(\log x)^r}{r!} \left(s_{n-r+1} - L_{1,n-r}(1-x)\right) - \frac{(\log x)^n}{n!} \cdot \log(1-x), \quad (14)$$

d'où, en posant $x = \frac{1}{2}$, cette formule numérique

$$a_n = \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(-1)^r \sigma_1^r}{r!} \cdot (s_{n-r} - a_{1,n-r-1}) - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \sigma_1^n. \quad (14^{\text{bis}})$$

Or, ces formules générales démontrées, il est très facile de construir toutes les branches diffèrentes des fonctions $L_{n,p}(x)$ et $M_{n,p}(x)$. En effet, désignons pour abréger par $[f(x)]_a$ ce qui deviendra $f(x)$ si nous faisons tourner dans le sens direct la variabile x autour du point $x = 0$ qui est point critique de $f(x)$, nous aurons immédiatement, à l'aide de (9) et en appliquant l'identité

$$[\log x]_0 = \log x + 2\pi i,$$

cette première équation

$$\left[M_{n,p}(x)\right]_0 = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot (2\pi i)^s \cdot M_{n-s,p}(x), \quad (15)$$

de sorte que nous obtenons, en vertu de (10), cette autre formule analogue

$$\left[M_{n,p}(x)\right]_1 = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r}{r!} \cdot (2\pi i)\left(M_{p,n-r}(1-x) - s_{n-r,p}\right). \quad (15^{\text{bis}})$$

La formule correspondante pour $[L_{n,p}(x)]_1$ peut être trouvée maintenant à l'aide de (13); cependant elle deviendra assez compliquée, de sorte que nous nous bornerons à déduir de (14) cette formule élégante

$$\left[L_{n+1}(x)\right]_1 = L_{n+1}(x) - \frac{2\pi i}{n!} \cdot (\log x)^n; \quad (16)$$

c'est-à-dire que la ramification de cette fonction est d'un caractère logarithmique.

Après ces remarques générales nous avons à considérer les trois séries numériques $s_{n,p}$, $\sigma_{n,p}$ et $a_{n,p}$ et à démontrer un nombre de relations remarquables entre ces nombres.

§ 3. Sommation de la série $s_{n,p}$ a l'aide des nombres s_r.

La forme même de l'expression intégrale obtenue de (4) pour $s_{n,p}$ nous conduira naturellement à prendre pour point de départ cette intégrale *eulérienne* de premier espèce

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \Re(x) > 0, \qquad \Re(y) > 0.$$

En effet appliquons la même méthode que dans ma Note précédente, la formule susdite se présente sous cette forme nouvelle

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = e^{\gamma(x)+\gamma(y)-\gamma(x+y)}$$

de sorte que nous obtenons par le même procédé, en différentiant p fois par rapport à y,

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\Big(\log(1-t)\Big)^p dt =$$

$$= (-1)^p\, p!\, e^{\gamma(x)+\gamma(y)-\gamma(x+y)} \cdot \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \cdot \overset{k,p}{V}(x,\ y),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\overset{k,p}{V}(x,\ y) = \Sigma\, \frac{u_{r_1}(x,\ y)\, u_{r_2}(x,\ y) \ldots u_{r_k}(x,\ y)}{r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \ldots r_k}$$

et

$$u_r(x,\ y) = s_r(y) - s_r(x+y).$$

Mettons maintenant dans ces expressions $y = 1$, et posons simplement

$\overset{k,p}{V}(x)$ et $u_r(x)$ au lieu de $\overset{k,p}{V}(x, 1)$ et $u_r(x, 1)$ respectivement, nous aurons cette formule plus particulière

$$\int_0^1 t^{x-1}\left(\log(1-t)\right)^p dt = (-1)^p p! \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\overset{k,p}{V}(x)}{x},$$

formule que nous avons à différentier ensuite $(n-1)$ fois par rapport à x. Ces calculs faits, mettons $x=0$ et remarquons que nous aurons pour la fonction

$$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

cette identité

$$D_x^{n-1}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)_{x=0} = \frac{1}{n} \cdot \overset{(n)}{\varphi}(0) = (n-1)!\, a_n,$$

nous trouverons finalement, en vertu de (4), pour $x=0$, cette formule générale

$$s_{n,p} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{k=1} \frac{1}{k!} \cdot \left(D_x^n \overset{k,p}{V}(x)\right)_{x=0}. \tag{17}$$

Pour effectuer les différentations nécessaires il est bon de se rappeler à cette identité

$$\left.\begin{aligned} u_r(x) = s_r - s_r(1+x) = \binom{r}{1} s_{r+1} \cdot x - \binom{r+1}{2} s_{r+2} \cdot x^2 + \\ + \binom{r+2}{3} s_{r+3} \cdot x^3 - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{17bis}$$

Il est évident que la formule (17) nous permet d'exprimer sous forme finie, à l'aide des nombres s_r, la somme de notre série numérique $s_{n,p}$. En effet, la formule susdite donnera ce théorème général:

La somme de la série numérique $s_{n,p}$ peut s'exprimer sous forme d'un polynome entier des nombres $s_2, s_3, \ldots s_{n+p}$ et homogène du dégré $(n+p)$ dans ces quantités si nous supposons s_r du dégré r; les coefficients du polynome susdit sont des nombres rationnels.

Considérer maintenant quelques cas particuliers de ce théorème général.

1.° $p=1$; nous n'avons dans ce cas qu'à considérer cette fonction unique

$$\overset{1,1}{V}(x) = u_1(x);$$

nous retrouvons l'identité $s_{n+1} = s_{n,1}$.

2.° $p = 2$; ici nous avons à étudier ces deux fonctions

$$\overset{1,2}{V}(x) = \frac{1}{2} \cdot u_2(x); \quad \overset{2,2}{V}(x) = \left(u_1(x)\right)^2,$$

ce qui donnera

$$s_{n,2} = \frac{n+1}{2} \cdot s_{n+2} - \frac{1}{2}(s_2 s_n + s_3 s_{n-1} + \cdots + s_n s_2),$$

de façon que nous obtiendrons, en posant $(n-1)$ au lieu de n:

$$\sum_{r=2}^{r=\infty} \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\right) = \frac{n}{2} \cdot s_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=1}^{r=n-1} s_r \cdot s_{n-r+1}$$

formule que j'ai démontrée récemment (*) d'une autre manière.

3.° $p = 3$; nous trouvons ici

$$\overset{1,3}{V}(x) = \frac{1}{3} \cdot u_3(x), \quad \overset{2,3}{V}(x) = u_1(x)\, u_2(x), \quad \overset{3,3}{V}(x) = \left(u_1(x)\right)^3,$$

ce qui donnera

$$s_{n,3} = \frac{(n+2)(n+1)}{6} s_{n+3} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} (n-r) s_{r+2} \cdot s_{n-r+1} + \frac{1}{6} \cdot \sum_{r=0}^{r=n-3} s_{r+2} \cdot \alpha_{n-r+1},$$

où nous avons posé pour abréger

$$\alpha_p = s_2 s_{p-2} + s_3 s_{p-3} + \cdots + s_{p-2} s_2.$$

Dans le cas $n = 7$ nous trouvons par exemple

$$s_{7,3} = 12\, s_{10} - \left(\frac{7}{2} s_8 s_2 + 4\, s_7 s_3 + 4\, s_6 s_4 + 1\, s_5^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} s_6 s_2^2 + \frac{1}{3} s_4^2 s_2 + \frac{1}{2} s_3^2 s_4 + s_2 s_3 s_5\right).$$

§ 4. Autres relations entre les séries numériques $s_{n,p}$, $\sigma_{n,p}$ et $a_{n,p}$.

Les formules générales que nous venons de développer au § 2 nous ont donné comme des cas particuliers quelques formules contenant les séries $a_{n,p}$, tandis que les mêmes formules générales ne nous donnent aucun moyen pour

(*) Ce Journal, même volume, p. 195.

introduire directement les séries analogues $\sigma_{n,p}$. Or, la formule (9bis) donne si nous posons respectivement

$$x = 1, \quad t = \sin^2 \varphi; \quad x = -1, \quad t = \operatorname{tg}^2 \varphi; \quad x = \frac{1}{2}, \quad t = 2 \sin^2 \varphi$$

ces expressions intégrales pour nos trois séries numériques

$$s_{n,p} = \frac{(-1)^{n+p-1} \cdot 2^{n+p}}{n!\,(p-1)!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \varphi \,.\, (\log \cos \varphi)^{p-1} (\log \sin \varphi)^n \, d\varphi \tag{18}$$

$$\sigma_{n,p} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{n+p}}{n!\,(p-1)!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi \,.\, (\log \cos \varphi)^{p-1} (\log \operatorname{tg} \varphi)^n \, d\varphi \tag{19}$$

$$a_{n,p} = \frac{(-1)^{n+p-1} \cdot 2^p}{n!\,(p-1)!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi \, (\log \cos \varphi)^{p-1} \left(\log (2 \sin^2 \varphi)\right)^n d\varphi, \tag{20}$$

formules qui nous permettent de déduire facilement un nombre de formules nouvelles entre nos trois séries numériques.

Posons dans (18) (19) (20) $p = 1$, nous trouvons des expressions intégrales pour s_{n+1}, σ_{n+1} et a_{n+1}.

Considérons maintenant en premier lieu cette intégrale définie :

$$A_{n,p} = \frac{(-1)^{n+p-1} \cdot 2^{n+p}}{n!\,(p-1)!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi \, (\log \cos \varphi)^{p-1} (\log \sin \varphi)^n \, d\varphi,$$

nous aurons, en posant

$$\log \sin \varphi = \log \operatorname{tg} \varphi + \log \cos \varphi$$

et en appliquent la formule du binome, à l'aide de (19), pour $A_{n,p}$ cette première expression

$$A_{n,p} = (-1)^p \cdot \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{p+r-1}{r} \cdot \sigma_{n-r,p+r}. \tag{21}$$

Posons ensuite dans § 2, (β) $x = \frac{1}{2}$, $t = \cos^2 \varphi$, nous aurons

$$M_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sigma_1^{n+p}}{n!\,p!} + A_{n,p}, \tag{α}$$

ce qui donnera, en vertu de (9bis) et de (6), pour $A_{n,p}$ cette autre expression

$$A_{n,p} = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{\sigma_1^r}{r!} \cdot a_{n-r,p}\,, \tag{21bis}$$

d'où, en vertu de (21),

$$\sum_{r=0}^{r=n} \frac{\sigma_1^r}{r!} \cdot a_{n-r\cdot p} = (-1)^p \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{p+r-1}{r} \cdot \sigma_{n-r,p+r}\,; \tag{22}$$

mettons particulièrement $n = 1$, nous aurons par là

$$a_{1,p} = (-1)^p \sigma_{1,p} - \frac{\sigma_1^{p+1}}{(p+1)!}\,. \tag{22bis}$$

Introduisons encore dans (10) au lieu de $M_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right)$ l'expression (α), nous aurons

$$A_{n,p} + A_{p,n} = s_{n,p} + \frac{\sigma_1^{n+p}}{n!\,p!}\,, \tag{β}$$

d'où, en vertu de (21) et (6), cette autre formule

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^p \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{p+r-1}{r} \cdot \sigma_{n-r,p+r} + \\ &+ (-1)^n \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \cdot \sigma_{p-r,n+r} = s_{n,p}\,, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

ce qui donnera pour $p = 1$ et $n - 1$ au lieu de n, ce cas particulier très élégant

$$\sum_{r=1}^{c=n-2} (-1)^r \sigma_{n-r,r} = s_n + (-1)^n \,.\, 2 \,.\, \sigma_{1,n-1}\,. \tag{23bis}$$

Posons ensuite dans (19)

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log \sin \varphi - \log \cos \varphi$$

et dans (20)

$$\log (2 \sin^2 \varphi) = \sigma_1 + 2 \log \sin \varphi\,,$$

la formule du binome donnera, en vertu de la définition de $A_{n,p}$,

$$\sigma_{n,p} = (-1)^p \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{p+r-1}{r} A_{n-r,p+r} \tag{24}$$

$$a_{n,p} = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \sigma_1^r\,, A_{n-r,p+r}\,. \tag{24bis}$$

Cela posé, exprimons dans (24) tous les nombres $A_{r,s}$ à l'aide de (21bis), nous trouverons cette proposition remarquable:

La somme de la série numérique $\sigma_{n,p}$ s'exprime sous forme d'une fonction linéaire et homogène des séries $a_{r,s}$ pour lesquelles $r \leqq n$, $s \geqq p$; les coefficients de cette expression sont des polynomes entiers et à coefficients rationnels de $\sigma_1 = \log 2$. *De plus, supposons $a_{r,s}$ du dégré $(r+s)$ et σ_1 du dégré* 1, *l'expression susdite est homogène du dégré $(n+p)$.*

Exprimons, au contraire, dans (24bis) tous le nombres $A_{r,s}$ à l'aide de (21), nous verrons que le théorème que nous venons d'indiquer restera vrai encore si nous y permutons les séries $a_{r,s}$ et $\sigma_{r,s}$.

Ces théorèmes démontrés, il est évident que pour connaître toutes les séries $a_{r,s}$ et $\sigma_{r,s}$ il suffit de trouver ou les $a_{r,s}$ ou les $\sigma_{r,s}$ seulement, cependant je n'ai pas réussi à résoudre ce problème.

Pour établir quelques autres relations entre les séries $s_{n,p}$ et $\sigma_{n,p}$ considérons encore cette intégrale définie

$$J_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi \, (\log \cos \varphi + \log \sin \varphi)^{n-1} \, d\varphi,$$

nous aurons de (19), en posant

$$\log \cos \varphi + \log \sin \varphi = \log \operatorname{tg} \varphi + 2 \log \cos \varphi,$$

et en appliquant ensuite la formule du binome, pour J_n cette première expression

$$J_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^{r+1} \cdot 2^{r+1} \cdot \sigma_{n-r-1, r+1}. \tag{25}$$

Introduisons ensuite dans (β) pour $A_{n,p}$ et $A_{p,n}$ les expressions intégrales correspondantes, et posons r au lieu de p et $n-r$ au lieu de n, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\binom{n-1}{r-1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi \, (\log \cos \varphi)^{r-1} (\log \sin \varphi)^{n-r} \, d\varphi + \\ &+ \binom{n-r-1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \varphi \, (\log \cos \varphi)^{n-r-1} \log \sin \varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot \binom{n}{r} \cdot \sigma_1^n - \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^n} \cdot s_{n-r,r}. \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

Posons maintenant dans cette formule $r=1$, $r=2$, $r=3,\ldots,$ $r=n-1$, puis ajoutons toutes ces équations, nous aurons à l'aide de la formule de binome, et après un simple calcul, pour J_n cette autre expression

$$J_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^n}{n!} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_1^{n-1} s_{n-r,r}\,, \tag{25^{bis}}$$

ce qui donnera, en vertu de (25) cette nouvelle formule numérique

$$\sum_1^{n-1} s_{n-r,r} = \sum_1^{n-1} (-1)^r\, 2^r \,.\, \sigma_{n-r,r}\,. \tag{26}$$

Mettons encore dans (γ) $(2n-1)$ au lieu de n et successivement $r=1,$ $2, 3,\ldots, 2n-1$, puis ajoutons avec des signes alternés toutes ces équations, la formule du binome donnera, après un simple calcul et à l'aide de (19) pour $p=1$, cette autre formule numérique

$$2\,\sigma_{2n} = \sum_1^{2n-1} (-1)^{r-1} \,.\, s_{2n-r,r}\,, \tag{27}$$

ou bien, à l'aide de l'identité $s_{n,p} = s_{p,n}$

$$\sigma_{2n} = \sum_1^{n-1} (-1)^{r-1} \,.\, s_{2n-r,r} - \frac{(-1)^n}{2} \cdot s_{n,n}\,. \tag{27^{bis}}$$

Il est digne d'être remarqué que cette formule numérique n'est au fond autre chose que cette formule intégrale bien connue

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,, \qquad 1 > \Re(x) > 0,$$

ou, en appliquant la formule du binome et en intégrant terme à terme la série infinie ainsi obtenue, ce qui est permis:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+s-1)}{1.2.3\ldots3} \cdot \frac{1}{x+s} \qquad \Re(x) < 1.$$

Cherchons en effet aux deux membres de cette formule le coefficient de x^{2n}, nous trouvons précisément, en vertu de (1), la relation (27).

En terminant ces recherches nous avons encore à indiquer un autre groupe de formules qui contiennent les séries $s_{n,p}$ et $\sigma_{n,p}$. A cet égard prenons comme point de départ cette formule bien comme

$$\int_0^\infty t^{x-1}(1+t)^{-y}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y-x)}{\Gamma(y)}, \qquad \Re(x) > 0, \qquad \Re(y-x) > 0,$$

puis mettons

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

et posons dans la dernière des intégrales nouvelles $\frac{1}{t}$ au lieu de t, nous aurons

$$\int_0^1 t^{x-1}(1+t)^{-y}\,dt + \int_0^1 t^{y-x-1}(1+t)^{-y}\,dt = e^{\gamma(x)+\gamma(y-x)-\gamma(y)}.$$

Différentions maintenant p fois par rapport à y cette dernière formule, puis posons $y=1$, le procédé ordinaire donnera sans peine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{p!}\cdot\int_0^1 \frac{t^{x-1}\left(\log(1+t)\right)^p}{1+t}\,dt + \\ &+\sum_{s=0}^{s=p}\frac{(-1)^s}{s!\,(p-s)!}\cdot\int_0^1 \frac{t^{-x}(\log t)^s\left(\log(1+t)^{p-s}\right)}{1+t}\,dt = \\ &= \frac{\pi x}{\sin \pi x}\cdot\sum_{k=1}^{k=p}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{\overset{k,p}{V}(-x)}{x}, \end{aligned}\right\} \quad (\vartheta)$$

où $\overset{k,p}{V}(x)$ est la même fonction que dans la formule (17).

Cela posé, mettons pour abréger

$$B_{r,p} = \sum_{k=1}^{k=p}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot D_x^r\left(\frac{\overset{k,p}{V}(-x)}{x}\right)_{x=0},$$

puis différentions $(n-1)$ fois par rapport à x la formule (ϑ), nous aurons finalement, en posant ensuite $x=0$ et en appliquant les deux expressions intégrales obtenues pour $\sigma_{n,p}$ en mettant dans (4) et (4bis) $x=-1$, cette formule nouvelle

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{n,p} + \sigma_{n-1,p+1} + (-1)^n\cdot\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}\sigma_{n+r-1,p-r+1} = \\ &= (-1)^{n+p-1}\cdot\sum_{r=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{2\,\sigma_{2r}}{(n-2r)!}\cdot B_{n-2r,p}, \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

où nous avons posé pour abréger $2\sigma_0 = 1$.

La formule générale (28) est très compliquée, il est vrai, cependant il est très facile de déduire de cette formule plusieurs autres que nous venons de démontrer. Indiquons quelques-uns de ces cas particuliers.

1.° $n=1$; nous retrouvons la formule (23bis).

2.° $p=1$; nous aurons dans ce cas

$$B_{r,1} = -\left(D_x^r \overset{1,1}{V}(-x)\right)_{x=0},$$

d'où, en vertu de (17bis),

$$B_{r,1} = r!\, s_{r+2};$$

ce qui donnera cette formule particulière

$$-\left(n-(-1)^n\right)\sigma_{n,1} + 2\cos^2\frac{n\pi}{2}\cdot\sigma_{n-1,2} = s_{n+1} + 2\sum_{r=1}^{\leq\frac{n-1}{2}} \sigma_{2r}\cdot s_{2n-2r+1},$$

d'où, en posant $(2n-1)$ au lieu de n, cette formule récursive

$$\sum_1^{n-1}\sigma_{2r}\, s_{2n-2r} = n\,\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\cdot s_{2n},$$

que j'ai démontrée récemment (*) d'une autre manière; c'est la même chose pour la formule analogue que nous trouvons en posant $2n$ au lieu de n.

Copenhague, le 26 avril 1903.

(*) Ce Journal, même volume, p. 196.

Evaluation nouvelle des formules de Binet, Gudermann et Raabe concernant la fonction gamma.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

I. Convergence uniforme de certaines séries infinies.

Dans son excellent mémoire sur la fonction gamma M. J. L. W. V. Jensen a déduit, le premier, d'une manière rigoureuse les séries de factorielles trouvées par Binet pour ces deux fonctions

$$\omega(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \log(\sqrt{2\pi})$$

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x),$$

où $\Psi(x)$ est la fonction de Gauss, savoir

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C - \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1}\right),$$

tandis que C désigne la constante d'Euler.

Cependant la méthode appliquée par M. Jensen ne permet pas de déterminer le champ complet de convergence des séries en question; particulièrement il est par cette méthode impossible de trouver l'aire où ces séries sont non absolument convergentes si un tel aire existe. Or, par un autre point de vue il est très facile de combler cette lacune dans la théorie élémentaire de la fonction gamma et cela à l'aide des moyens les plus élémentaires, savoir la formule

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x(x+1)} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n)} + R_n(x), \qquad (1)$$

(*) *Nyt Tidsskrift for Mathematik.* t. 2 B, 1891 (Copenhague, danois).

où nous avons posé pour abréger

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{x(x+1)\dots(x+n)} \cdot \frac{1}{x-\alpha}. \qquad (1^{\text{bis}})$$

Remarquons encore en passant que notre méthode donnera comme des corrollaires les formules dues à GUDERMANN et RAABE concernant $\Gamma(x)$.

Il est bien connu que la formule (1), qui est due à STIRLING du reste, peut être démontrée d'une manière complètement élémentaire, cependant la formule

$$\int_0^1 z^{x-\alpha-1}\,dz = \frac{1}{x-\alpha}, \qquad \Re(x-\alpha) > 0,$$

nous conduira immédiatement au but, si nous posons sous le signe d'intégration

$$z^{x-\alpha-1} = z^{x-1} \cdot z^{-\alpha}$$

et si nous appliquons ensuite n fois l'intégration par parties.

Écrivons maintenant sous cette forme

$$R_n(x) = \frac{\alpha}{x(x-\alpha)}\left(1-\frac{x-\alpha}{x+1}\right)\left(1-\frac{x-\alpha}{x+2}\right)\dots\left(1-\frac{x-\alpha}{x+n}\right)$$

l'expression (1bis) pour $R_n(x)$, puis supposons $\Re(x-\alpha) > 0$, il est évidemment possible de déterminer un positif entier N, tel que

$$|R_n(x)| < \varepsilon, \qquad n \geqq N, \qquad (2)$$

où ε désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.

Posons encore dans (1) $x = \alpha + p$, p désignant un positif entier, puis divisons dans cette même formule par

$$\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1),$$

nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n} \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)\dots(\alpha+s+p)} = \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+p)}\right), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

formule qui est valable pour une valeur finie quelconque de α.

Cela posé, mettons dans (1) $x+1, x+2, \dots, x+p$ au lieu de x, puis

ajoutons toutes les $p+1$ équations ainsi obtenues, nous aurons, en vertu de (3), une formule de cette forme

$$\sum_{s=0}^{s=p}\left(\frac{1}{x-\alpha+s}-\frac{1}{x+s}\right)=\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\dots(x+s-1)}+R_{n,p}(x), \quad (4)$$

où nous avons posé pour abréger

$$R_{n,p}(x)=\sum_{s=0}^{s=p}R_n(x+s)-\frac{\alpha}{x+n}-\sum_{s=2}^{s=n}\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1)}{(x+p)\dots(x+p+s-1)};$$

or, appliquons cette identité, où q désigne un positif entier

$$R_n(x+q)=\frac{x-\alpha}{x-\alpha+q}\cdot\frac{x(x+1)\dots(x+q-1)}{(x+n+1)\dots(x+n+q)}\cdot R_n(x),$$

nous aurons pour le terme de reste $R_{n,p}(x)$ cette autre expression

$$\left.\begin{aligned}R_{n,p}(x)=&\left(1+\sum_{s=1}^{s=p}\frac{x-\alpha}{x-\alpha+s}\cdot\frac{x(x+1)\dots(x+s-1)}{(x+n+1)\dots(x+n+s)}\right)R_n(x)-\\&-\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{s}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1)}{(x+p)\dots(x+p+s-1)}\,.\end{aligned}\right\}\quad (4^{\text{bis}})$$

Cela posé il est facile de démontrer qu'il est possible de déterminer deux nombres positifs entiers N et P, tels que

$$|R_{n,p}(x)|<\varepsilon, \quad (5)$$

pourvu que l'on ait à la fois

$$n\geqq N,\quad p\geqq P,\quad \Re(x-\alpha)>0,$$

et pourvu que ε désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut. En effet le second membre de (4bis) représente deux séries absolument convergentes multipliées par $R_n(x)$ et par $\frac{\alpha}{x+p}$ respectivement, ce qui suffit pourvu que α ne soit pas égal à un entier non positif.

Comme résultat de nos recherches précédentes nous aurons ce lemme fondamental:

Faisons croître à l'infini dans (1) *le nombre* n *et dans* (4) *les nombres* n *et* p, *puis divisons par une ligne quelconque perpendiculaire à l'axe des nombres réels en deux partie le plan, savoir* D *située à droite et* G *à gauche de la ligne susdite. Cela posé, les deux séries infinies obtenues de* (1) *et* (4) *seront uniformement convergentes pourvu que les deux variables* x *et* α *soient assujetties à être situées constamment dans* D *et dans* G *respectivement.*

II. Évaluation des formules de Binet, Gudermann et Raabe.

Faisons croître à l'infini dans (4) les nombres n et p, nous trouverons cette formule bien connu:

$$\Psi(x) - \Psi(x-\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s)}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{6}$$

qui est valable pourvu que $\Re(x-\alpha) > 0$.

Or, la série infinie figurant au second membre de (6) étant uniformement convergente, il est permis de l'intéger terme à terme par rapport à α pourvu que α soit choisi de façon que pour tout le chemin d'intégration nous avons $\Re(x-\alpha) > 0$. Posons maintenant

$$\omega_1(\alpha, x) = \int_0^\alpha \Big(\Psi(x) - \Psi(x-\alpha)\Big)\, d\alpha, \tag{7}$$

la définition de $\Psi(x)$ donnera sans peine

$$\omega_1(\alpha, x) = \alpha\,\Psi(x) + \log\Gamma(x-\alpha) - \log\Gamma(x), \tag{7bis}$$

de façon que nous aurons

$$\omega_1(-1, x) = \log x - \Psi(x) = \omega_1(x) \tag{8}$$

$$\omega_1(1, x+1) = \Psi(x+1) - \log x = \frac{1}{x} - \omega_1(x). \tag{8bis}$$

Quant à l'intégration de la série infinie figurant au second membre de (6), posons généralement

$$\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = C_n^0\,\alpha^n + C_n^1\,\alpha^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1}\,\alpha,$$

nous aurons immédiatement

$$\omega_1(\alpha, x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\dfrac{\alpha^{s+1}}{s+1}\cdot C_s^0 + \dfrac{\alpha^s}{s}\cdot C_s^1 + \cdots + \dfrac{\alpha^2}{2}\cdot C_s^{s-1}}{s\,.\,x(x+1)(x+2)\ldots(x+s-1)}, \tag{9}$$

formule qui est valable, pourvu que x soit un point du demi-plan D, tandis que le chemin d'intégration $(0, \alpha)$ soit situé complètement dans G. Introduisons encore dans (7), au lieu de $\Psi(x) - \Psi(x-\alpha)$, la série infinie obtenue

pour $p = \infty$ du premier membre de (4), nous aurons pour $\omega_1(\alpha, x)$ cet autre développement

$$\omega_1(\alpha, x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \frac{\alpha}{x+s}\right). \qquad (9^{\text{bis}})$$

Cela posé, mettons dans (9) $\alpha = -1$, nous aurons, en vertu de (8), ce premier développement en série de factorielles

$$\omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot C_s^{s-1} - \frac{1}{3}\cdot C_s^{s-2} + \cdots - \frac{(-1)^s}{s+1}\cdot C_s^0}{s\,.\,x(x+1)(x+2)\ldots(x+s-1)}, \qquad (10)$$

qui a été indiqué légèrement per Binet (*) et qui est valable pourvu que $\Re(x) > 0$. Posons encore dans (9) $\alpha = 1$ et $x+1$ au lieu de x, nous aurons, en vertu de (9),

$$\frac{1}{x} - \omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot C_s^{s-1} + \frac{1}{3}\cdot C_s^{s-2} + \cdots + \frac{1}{s+1}\cdot C_s^0}{s\,.\,(x+1)(x+2)\ldots(x+s)}, \qquad (\alpha)$$

qui est valable aussi pour $\Re(x) > 0$. Mettons maintenant dans (1) $\alpha = 1$ et $x+1$ au lieu de x, nous aurons de même

$$\frac{1}{x} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}\cdot \frac{C_s^{s-1} + C_s^{s-2} + \cdots + C_s^0}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s)}, \qquad (\beta)$$

car nous aurons évidemment

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots(s-1)\,s = C_s^0 + C_s^1 + \cdots C_s^{s-1} = (s-1)!\,s.$$

Or, les formules (α) et (β) donnent aisément cet autre développement en série de factorielles

$$\omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot C_s^{s-1} + \frac{2}{3}\cdot C_s^{s-2} + \cdots + \frac{s}{s+1}\cdot C_s^0}{s\,.\,(x+1)(x+2)\ldots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0, \qquad (10^{\text{bis}})$$

qui est donné explicitement par Binet (**).

La formule générale (9) est due à M. Mellin (***).

Pour évaluer les deux séries de factorielles obtenues par Binet pour la fonction $\omega(x)$, intégrons de 0 à α terme à terme la série infinie figurant au

(*) *Journal de l'École Polytechnique,* cah. 27, p. 239.
(**) Loc. cit., p. 234.
(***) *K. Svenska Vetensk. Akad. Förhandlingar.* Stockholm, 1883.

second membre de (9bis), ce qui est permis, nous aurons sans peine

$$\int_0^\alpha \omega_1(\alpha, x)\, d\alpha = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left[\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \right.$$

$$\left. + \alpha - \frac{\alpha}{2} \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) - \frac{\alpha^2}{2(x+s)}\right],$$

d'où, en posant

$$\omega(\alpha, x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left[\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha\right], \tag{11}$$

nous aurons, en vertu de (9bis),

$$\int_0^\alpha \omega_1(\alpha, x)\, d\alpha = \omega(\alpha, x) + \frac{\alpha}{2} \cdot \omega_1(\alpha, x). \tag{11^{bis}}$$

Intégrons maintenant de 0 à α terme à terme la série infinie figurant au second membre de (9), nous aurons de plus cet autre développement en série de factorielles

$$\left.\begin{array}{l} \omega(\alpha, x) = \\ = -\dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\dfrac{s \cdot \alpha^{s+2}}{(s+1)(s+2)} \cdot C_s^0 + \dfrac{(s-1) \cdot \alpha^{s+1}}{s(s+1)} \cdot C_s^1 + \cdots + \dfrac{1 \cdot \alpha^3}{2 \cdot 3} \cdot C_s^{s-1}}{s \cdot x(x+1) \ldots (x+s-1)}, \end{array}\right\} \tag{12}$$

formule qui est valable aussi, pourvu que le chemin d'intégration $(0, \alpha)$ soit situé complètement dans le demi-plan G, tandis que x désigne un point de D.

Remarquons maintenant que l'intégrale prise par rapport à x de 1 à x du terme général figurant au second membre de (9bis) deviendra

$$-(x + s - \alpha) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + (s + 1 - \alpha) \log\left(1 - \frac{\alpha}{s+1}\right) =$$

$$= -\left[\left(x + s - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \alpha\right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}\left[\log\left(1 - \frac{\alpha}{x+s}\right) + \frac{\alpha}{x+s}\right] - \frac{\alpha^2}{2(x+s)} +$$

$$+ \left[\left(s + 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \log\left(1 - \frac{\alpha}{s+1}\right) + \alpha\right] -$$

$$- \frac{\alpha}{2}\left[\log\left(1 - \frac{\alpha}{s+1}\right) + \frac{\alpha}{s+1}\right] + \frac{\alpha^2}{2(s+1)},$$

nous aurons cette autre formule intégrale

$$\left.\begin{aligned} -\int_1^x \omega_1(\alpha, x)\, dx = \omega(\alpha, x) - \omega(\alpha, 1) + \\ + \frac{\alpha}{2}\Big(\omega_1(\alpha, x) - \omega_1(\alpha, 1)\Big) - \frac{\alpha^2}{2}(\Psi(x) + C), \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

où C désigne la constante d'Euler.

Revenons encore à la formule (7bis), nous avons au contraire

$$\int_1^x \omega_1(\alpha, x)\, dx = -\alpha \log \Gamma(x) - \int_1^x \Big(\log \Gamma(x - \alpha) - \log \Gamma(\alpha)\Big)\, dx, \qquad (\partial)$$

de façon (γ) et (∂) donneront pour $\alpha = -1$ cette autre identité

$$\omega(-1, x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x + \omega(-1, 1); \qquad (\varepsilon)$$

posons ensuite dans cette formule $x + \frac{1}{2}$ au lieu de x, puis ajoutons cette formule nouvelle à (ε), nous aurons, en vertu de la formule bien connue

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \log \Gamma(2x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right)\log 2 + \log(\sqrt{2\pi}),$$

cette autre identité

$$\left.\begin{aligned} \omega(-1, x) + \omega\left(-1, x + \frac{1}{2}\right) = \omega(-1, 2x) + \\ + x \log\left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} + \log\left(\sqrt{2\pi}\right) + \omega(-1, 1). \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

Cela posé, faisons croître à $+\infty$ la partie réelle de x, la formule (12) montrera clairement que $\omega(-1, x)$ doit s'évanouir, et nous obtenons à l'aide de (ξ) cette relation numérique

$$\omega(-1, 1) = -\log(\sqrt{2\pi}),$$

ce qui donnera, en vertu de (ε)

$$\omega(-1, x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log(\sqrt{2\pi}) = \omega(x); \qquad (13)$$

c'est-à-dire que la formule (11) donnera pour $\alpha = -1$ precisément la série de Gudermann (*) pour la fonction $\omega(x)$.

Posons encore dans (12) $\alpha = -1$, nous obtenons ce développement en série de factorielles

$$\left.\begin{aligned} &\omega(x) = \\ &= \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2.3} \cdot C_s^{s-1} - \frac{2}{3.4} \cdot C_s^{s-2} + \cdots + \frac{(-1)^s s}{(s+1)(s+2)} \cdot C_s^0}{2s \,.\, x(x+1)\ldots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

qui est due à Binet (**). Pour trouver l'autre série de factorielles de Binet (***), remarquons que la formule (11) donnera

$$\omega(1, x+1) = -\omega(-1, x) = -\omega(x),$$

nous aurons, en vertu de (12),

$$\left.\begin{aligned} &\omega(x) = \\ &= \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2.3} \cdot C_s^{s-1} + \frac{2}{3.4} \cdot C_s^{s-2} + \cdots + \frac{s}{(s+1)(s+2)} \cdot C_s^0}{2s \,.\, (x+1)(x+2)\ldots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0. \end{aligned}\right\} \quad (14^{\text{bis}})$$

Enfin combinons les deux formules (7bis) et (11bis), nous aurons cette formule remarquable

$$\int_0^\alpha \log\Gamma(x-\alpha)\,d\alpha = \omega(\alpha, x) + \frac{\alpha}{2}\Big(\log\Gamma(x-\alpha) + \log\Gamma(x)\Big) \qquad (15)$$

qui n'est autre chose qu'une généralisation de la formule de Raabe que nous obtenons en posant $\alpha = 1$. Appliquons en effet la formule (18), nous trouverons par là cette formule

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+\alpha)\,d\alpha = x(\log x - 1) + \log(\sqrt{2\pi}), \qquad (16)$$

valable, pourvu que la partie réelle de x soit positive.

(*) *Journal de Crelle,* t. 29, p. 209-212; 1845.
(**) loc. cit., p. 339.
(***) loc. cit, p. 258.

La formule (16) est, dans un cas particulier, due à Raabe. En effet, dans son premier Mémoire (*) sur ce sujet Raabe démontre la formule (16) pour des valeurs entières et non négatives de x, tandis que dans un second Mémoire (**) il l'extend au cas plus général, où x désigne une quantité réelle non négative.

Autres démonstrations de la formule de Raabe sont données plus tard par Stern (***) et Betrand (****).

Copenhague, le 6 juin 1903.

(*) *Journal de Crelle*, t. 25, p. 149; 1843.
(**) *Journal de Crelle*, t. 28, p. 10-18; 1844.
(***) G. F. Meyer, *Theorie der bestimmten Integrale*, p. 158, Leipsic, 1871.
(****) Cours de M. Hermite, p. 103, Paris, 1882.

Sulla deformazione dei paraboloidi.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

In una Nota del 26 Aprile 1903, inserita negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, partendo dai risultati conseguiti dal Thybaut (*) e dal Calapso (**) nello studio delle superficie applicabili sul generale paraboloide ellittico ed iperbolico, ho esposto alcune considerazioni che avevano per iscopo d'iniziare per queste superficie la costruzione di una teoria analoga a quella delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante, cioè delle superficie applicabili sulla sfera (reale od immaginaria).

Nella presente Memoria, con un primo sviluppo delle idee esposte in quella Nota, giungo a stabilire il risultato principale seguente: *Con sole quadrature si possono determinare, per mezzo delle loro equazioni intrinseche, quante si vogliano superficie applicabili sui paraboloidi generali e dipendenti da un numero grande ad arbitrio di costanti arbitrarie.*

Considero del resto questo risultato solo come un primo passo nella nuova teoria. La determinazione delle successive deformate dei paraboloidi avviene qui invero soltanto per mezzo delle loro *equazioni intrinseche*, cioè coll'assegnazione delle due forme differenziali quadratiche fondamentali della superficie, sicchè per trovarne l'effettiva forma nello spazio converrebbe ancora integrare, ogni volta, un'equazione differenziale ordinaria del tipo di Riccati. Ma già da alcuni raffronti, che sarebbe inutile esporre per ora, appare probabile che ulteriori studi in questo indirizzo permettano di raggiungere com-

(*) *Sur la déformation du paraboloide* (Annales de l'Ecole Normale, 3ème série, t. XIV (1897)).

(**) *Sulla deformazione delle quadriche.* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 16° (1902).)

pletamente lo scopo prefissato, portando la nuova teoria al punto di perfezionamento ormai raggiunto nella teoria delle superficie di curvatura costante.

Per l'esposizione delle ricerche contenute nella Memoria, non volendo rimandare il lettore alla mia Nota citata, ho dovuto riprodurne nei primi paragrafi (1 a 6) pressochè l'intero contenuto (ciò che ho fatto quasi testualmente). In particolare ho ivi ripetuta l'analisi che collega le deformazioni delle superficie d'elemento lineare

$$\left.\begin{aligned} d s^2 = (a_{11}\alpha^2 + 2 a_{12}\alpha + a_{22})\, d\alpha^2 \pm \\ \pm 2 (a_{11}\alpha\beta + a_{13}\alpha + a_{12}\beta + a_{23})\, d\alpha\, d\beta + \\ + (a_{11}\beta^2 + 2 a_{13}\beta + a_{33})\, d\beta^2 \text{ (*)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

alle equazioni a derivate parziali del 2.° ordine del tipo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} \pm \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \text{sen}\,\omega \cdot \cos\omega,$$

ovvero dell'altro

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \pm \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = A\, e^{2\theta} + B\, e^{-2\theta}\ (A,\ B \text{ costanti}).$$

Ad ogni soluzione ω o θ di una tale equazione corrisponde una tripla infinità di superficie d'elemento lineare (1), la cui determinazione dipende dall'integrazione di un sistema lineare omogeneo di equazioni ai differenziali totali con quattro funzioni incognite. Il primo passo da farsi per la successiva ricerca consisteva adunque nell'esame di questo sistema e della sua eventuale integrazione. Ed appunto, confrontando il sistema in discorso con quello che si presentò nelle mie recenti ricerche sulle trasformazioni delle superficie di curvatura costante, ho potuto constatare che con semplici mutamenti si riconduce l'uno all'altro. Così le proprietà, ormai ben note, di queste trasformazioni trovano un'immediata applicazione nello studio delle deformate dei paraboloidi e conducono al risultato principale che ho sopra enunciato.

È per altro da osservarsi che, pel caso particolare dei paraboloidi ordinarii, le superficie di curvatura costante che conviene considerare non sono già quelle dell'ordinario spazio Euclideo d'elemento lineare

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2;$$

(*) In questa formola le α, β indicano le coordinate curvilinee e i coefficienti

$$a_{ik}\ (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

sono costanti.

sibbene quelle appartenenti allo spazio col $d s^2$ indefinito:

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 - d z^2 ;$$

questo può dirsi uno spazio Euclideo con *circolo all'infinito reale.* Inoltre le superficie di curvatura costante in questione debbono essere di *seconda specie*, cioè le loro linee di lunghezza nulla debbono essere reali.

Insieme alla dimostrazione del risultato principale enunciato, si troveranno in questa Memoria alcune ricerche complementari, relative le prime (§§ 19-21) alle deformazioni di una speciale superficie d'elemento lineare (1), le rimanenti concernenti l'altro problema di determinare i sistemi ciclici i cui circoli giacciono nei piani tangenti delle superficie d'elemento lineare (1); in particolare dei paraboloidi. Si vedrà che i metodi stessi adoperati nella prima parte del lavoro riescono applicabili anche al secondo problema, e conducono a risultati perfettamente analoghi, collegati alle trasformazioni delle superficie di curvatura costante.

Osserverò da ultimo che sarebbe stato facile presentare la trattazione dei nostri problemi sotto un aspetto puramente analitico, sopprimendo le considerazioni geometriche che hanno condotto a trasformare i citati sistemi di equazioni ai differenziali totali in altri già noti, ciò che costituisce la parte essenziale della ricerca.

Mi è parso al contrario opportuno lasciare all'esposizione la forma stessa che ha assunto l'effettiva ricerca, perchè risulta così, in un nuovo esempio, l'utilità che si può trarre per lo studio delle proprietà geometriche dell'ordinario spazio da considerazioni relative a spazî di natura affatto differente.

§ 1.

Superficie di traslazione d'elemento lineare (1).

Per l'elemento lineare (1), che scriviamo anche colle usuali notazioni

$$d s^2 = E\, d\alpha^2 + 2 F\, d\alpha\, d\beta + G\, d\beta^2,$$

se poniamo $H = E G - F^2$, ne risulta

$$H = A_{22}\, \alpha^2 + 2 A_{23}\, \alpha \beta + A_{33}\, \beta^2 - 2 A_{12}\, \alpha - 2 A_{13}\, \beta + A_{11}, \tag{2}$$

dove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Se calcoliamo per la forma quadratica (1) i valori effettivi dei simboli di CHRISTOFFEL (Vol. I, pag. 92) (*), troviamo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial \alpha}, \\ \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log H}{\partial \beta}, \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

il doppio segno valendo in corrispondenza del doppio segno nella (1).

Calcolando ora la curvatura K del nostro ds^2, p. e. dalla formola (Vol. I, pag. 77):

$$KF = \frac{\partial}{\partial \alpha}\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \beta}\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

si ha per le precedenti

$$\left.\begin{aligned} KF &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log H}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{1}{4}\frac{\partial \log H}{\partial \alpha}\frac{\partial \log H}{\partial \beta} = \\ &= \frac{1}{H^2}\left\{\frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{H}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sviluppando l'espressione fra parentesi del secondo membro

$$\frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{H}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha\, \partial \beta} =$$
$$= (A_{22}\,\alpha + A_{23}\,\beta - A_{12}) \cdot (A_{23}\,\alpha + A_{33}\,\beta - A_{13}) - A_{23} \cdot H,$$

col far uso delle note relazioni fra i minori del 2.° ordine del determinante reciproco e gli elementi del primitivo, la (4) diventa

$$\pm K \cdot (a_{11}\,\alpha\,\beta + a_{13}\,\alpha + a_{12}\,\beta + a_{23}) =$$
$$= \frac{A}{H^2}(a_{11}\,\alpha\,\beta + a_{13}\,\alpha + a_{12}\,\beta + a_{23})$$

(*) Le citazioni come questa del testo si riferiscono alle mie *Lezioni di geometria differenziale*, 2.ª edizione, in due volumi. (Pisa-Spörri, 1902-1903.)

e quindi si ha

$$K = \pm \frac{A}{H^2} \text{ (*)}. \tag{5}$$

Si vede di qui che, ove si prenda nella (1) il segno superiore, la curvatura K ha il segno stesso di A, ed il contrario accade per la scelta del segno inferiore. Quando poi fosse nullo il determinante A la superficie sarebbe sviluppabile, caso ovvio che intendiamo escluso nel seguito.

Ciò premesso, è facile vedere che possiamo soddisfare per l'elemento lineare (1) alle equazioni di Gauss e di Codazzi, prendendo pei coefficienti D, D', D'' della seconda forma quadratica fondamentale della superficie (Vol. I, pag. 113) i valori seguenti

$$D = \frac{c}{\sqrt{H}}, \quad D'' = \pm \frac{c}{\sqrt{H}}, \quad D' = 0, \tag{6}$$

con c conveniente costante, reale ovvero puramente immaginaria.

E invero con questi valori (6) di D, D', D'' le equazioni di Codazzi (Vol. I, pag. 119) risultano identicamente soddisfatte per le (3) e la equazione di Gauss (ibid)

$$\frac{D D'' - D'^2}{H} = K.$$

diventa per la (5): $\frac{c^2}{H^2} = \frac{A}{H^2}$, onde risulta per la costante c il valore

$$c = \sqrt{A}, \tag{6*}$$

reale per $A > 0$, puramente immaginario per $A < 0$.

Alle due forme differenziali quadratiche, date la prima dalla (1) e la seconda da

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}} (d\alpha^2 \pm d\beta^2)$$

appartiene una superficie S sulla quale il sistema (α, β) è coniugato. Poichè inoltre $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = 0$, la S è una superficie di traslazione (Vol. I,

(*) Qui si è supposto che non sia identicamente $F = 0$; ma la (5) vale anche in questo caso perchè, riducendosi la forma differenziale (1) a coefficienti costanti, si ha $K = 0$, come anche $A = 0$.

pag. 142). Però la S sarà reale solo quando $A > 0$, ed immaginaria per $A < 0$, nel quale ultimo caso per le coordinate x, y, z di un punto mobile sopra S potremo assumere le due prime x, y reali, la terza z puramente immaginaria.

§ 2.

Sistema coniugato permanente (u, v).

Si consideri ora una qualunque superficie *reale* $\overline{S}$ applicabile sulla nostra S, cioè d'elemento lineare (1), e sia

$$\overline{D}\, d\,\alpha^2 + 2\,\overline{D}'\, d\,\alpha\, d\,\beta + \overline{D}''\, d\,\beta^2$$

la sua seconda forma quadratica fondamentale. Consideriamo le linee (u, v) che formano il sistema coniugato comune alle due superficie S, $\overline{S}$, che diremo il sistema coniugato *permanente* della coppia di superficie $(S, \overline{S})$. Queste linee u, v sono le linee integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} \overline{D}\, d\,\alpha + \overline{D}'\, d\,\beta & \overline{D}'\, d\,\alpha + \overline{D}''\, d\,\beta \\ d\,\alpha & \pm\, d\,\beta \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\overline{D}'\, d\,\alpha^2 + (\overline{D}'' \mp \overline{D})\, d\,\alpha\, d\,\beta \mp \overline{D}'\, d\,\beta^2 = 0.$$

Le radici di questa equazione di secondo grado in $\frac{d\,\alpha}{d\,\beta}$ sono sempre reali se valgono i segni superiori. E nell'altro caso, poichè il determinante è:

$$(\overline{D} + \overline{D}'')^2 - 4\,\overline{D}'^2 = (\overline{D} - \overline{D}'')^2 - \frac{4\,A}{H},$$

vediamo che il sistema coniugato permanente *può essere* immaginario solo se $A > 0$, cioè quando la curvatura K è negativa. In ogni caso però il sistema coniugato permanente consta di un doppio sistema di linee distinte, ove si escludano le ben note deformazioni di superficie rigate in altre rigate. E infatti presa una coppia qualunque di superficie applicabili $(S, \overline{S})$, non sviluppabili, aventi a comune la prima forma quadratica fondamentale e colle due

seconde forme date da

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \qquad \overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2$$

l'equazione differenziale delle linee del sistema coniugato permanente è data da

$$(D\,\overline{D}' - D'\,\overline{D})\,du^2 + (D\,\overline{D}'' - D''\,\overline{D})\,du\,dv + (D'\,\overline{D}'' - D''\,\overline{D}')\,dv^2 = 0;$$

se si suppone p. e. che queste linee coincidano nelle linee v, si avrà:

$$D\,\overline{D}' - D'\,\overline{D} = 0, \qquad D\,\overline{D}'' - D''\,\overline{D} = 0,$$

onde si vede che o sussisterà la proporzione

$$D : D' : D'' = \overline{D} : \overline{D}' : \overline{D}''$$

e le due superficie saranno sovrapponibili o simmetriche, ovvero sarà simultaneamente

$$D = 0, \qquad \overline{D} = 0.$$

In quest'ultimo caso le linee v sono assintotiche sull'una e sull'altra superficie e quindi, per un noto teorema, rettilinee (Vol. I, pag. 251).

Ciò posto, diremo che la deformazione della S nella $\overline{S}$ è di *prima specie* se il sistema coniugato permanente è reale, di *seconda specie* se questo sistema è immaginario. Nel caso nostro adunque le deformazioni di seconda specie si presenteranno soltanto quando nella (1) si assuma il segno inferiore e sia $A > 0$ (K negativa).

§ 3.

Caso in cui nella (1) si prenda il segno superiore.

Nel caso che vogliamo ora trattare il sistema coniugato permanente (u, v) è reale (deformazioni di 1.ª specie) ed abbiamo

$$D = D'' = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}}. \qquad (6^*)$$

Siano

$$\alpha = \alpha(u, v), \qquad \beta = \beta(u, v)$$

le formole di passaggio dalle coordinate (α, β) alle (u, v), ed indichiamo con $\left\{ \overline{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}} \right\}$ i simboli di Christoffel pel $d s^2$ in coordinate u, v. Siano poi

$$\Delta\, d u^2 + \Delta''\, d v^2, \qquad \overline{\Delta}\, d u^2 + \overline{\Delta}''\, d v^2$$

le due seconde forme quadratiche fondamentali di S, $\overline{S}$ rispettivamente, riferite al sistema coniugato comune (u, v). Avendosi

$$\Delta\, d u^2 + \Delta''\, d v^2 = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}} (d \alpha^2 + d \beta^2),$$

si traggono in primo luogo le formole

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}} \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right] \\ \Delta'' &= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}} \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 \right] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} = 0. \tag{8}$$

Ora, ricorrendo alle formole fondamentali di Christoffel relative alla equivalenza di due forme differenziali quadratiche (Vol. I, pag. 64, formole (II)), ed avendo riguardo alle (3) ed alla (8), si traggono in particolare le formole:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} = \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix}} \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix}} \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial u \partial v} = \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix}} \right\} \frac{\partial \beta}{\partial u} + \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix}} \right\} \frac{\partial \beta}{\partial v},$$

dalle quali, osservando la (8), deduciamo:

$$\left.\begin{aligned} 2\left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix}} \right\} &= \frac{\partial}{\partial v} \log \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right] \\ 2\left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix}} \right\} &= \frac{\partial}{\partial u} \log \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 \right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Prendansi ora le due prime formole di Codazzi relative alla S, $\overline{S}$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial v} &= \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix}} \right\} \Delta - \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix}} \right\} \Delta'' \\ \frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial v} &= \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix}} \right\} \overline{\Delta} - \left\{ \overline{\begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix}} \right\} \overline{\Delta}'', \end{aligned}\right.$$

e moltiplicando la prima per Δ, la seconda per $\bar{\Delta}$ e sottraendo col ricordare che per l'equazione di Gauss $\Delta\,\Delta'' = \bar{\Delta}\,\bar{\Delta}''$, se ne trarrà

$$\frac{\partial\,(\bar{\Delta}^2 - \Delta^2)}{\partial v} = 2 \left\{ \overline{\begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix}} \right\} (\bar{\Delta}^2 - \Delta^2).$$

Siccome supponiamo $\bar{\Delta}^2 \neq \Delta^2$ (altrimenti le S, $\bar{S}$ coinciderebbero), la precedente può scriversi per la prima delle (9)

$$\frac{\partial}{\partial v} \log\,(\bar{\Delta}^2 - \Delta^2) = \frac{\partial}{\partial v} \log \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right],$$

e integrando ne segue

$$\bar{\Delta}^2 = \Delta^2 + \psi(u) \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right],$$

dove $\psi(u)$ indica una funzione della sola u. Cangiando il parametro u possiamo rendere $|\psi(u)| = 1$, onde avremo

$$\bar{\Delta}^2 = \Delta^2 + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right],$$

indicando ε l'unità positiva o negativa. Una seconda formola analoga otteniamo operando similmente sulle due seconde equazioni di Codazzi; sussisteranno dunque le formole:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 &= \Delta^2 + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right] \\ \bar{\Delta}''^2 &= \Delta''^2 + \varepsilon' \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 \right], \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

con $|\varepsilon| = |\varepsilon'| = 1$.

Dalla equazione di Gauss $\bar{\Delta}\,\bar{\Delta}'' = \Delta\,\Delta''$ segue poi, per le (10) e per le (7), l'altra formola

$$\varepsilon \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 \right] + \varepsilon' \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 \right] + \varepsilon\,\varepsilon'\,\frac{H}{A} = 0. \tag{11}$$

Viceversa si vede subito che, soddisfatte le (8), (11) i valori di $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}''$ tratti dalle (10), colla determinazione dei segni che risulta da $\bar{\Delta}\,\bar{\Delta}'' = \Delta\,\Delta''$, vengono a soddisfare le equazioni di Codazzi e di Gauss. Ne risulta per tal modo individuata una superficie S applicabile sulla $\bar{S}$ ed avente a comune con S il sistema coniugato (u, v).

Ci resta ora da tener conto delle condizioni che debbono verificarsi affinchè la deformata $\bar{S}$ sia reale, per la qual cosa è necessario e sufficiente che $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}''$ risultino reali.

§ 4.

Distinzione dei casi $A > 0$, $A < 0$.

Per l'ulteriore discussione dobbiamo separare i casi di A positiva e di A negativa.

1.º caso $A > 0$. Essendo $H > 0$, bisognerà evidentemente che nella (11) ε, ε' abbiano segno contrario. Senza alterare la generalità (scambiando ove occorra u con v) potremo supporre

$$\varepsilon = -1, \qquad \varepsilon' = +1$$

e le equazioni fondamentali pel nostro problema d'applicabilità diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} = 0 \\ \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2\right] = \frac{H}{A}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Coll'analisi stessa usata da Calapso pel caso dei paraboloidi (l. c.) riduciamo il sistema (α) ad un sistema lineare omogeneo procedendo nel modo seguente. Poniamo

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 = \lambda^2, \qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 = \mu^2, \qquad (12)$$

indi alla prima delle (α), denotando con ω un angolo ausiliario, potremo sostituire le seguenti

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega. \qquad (13)$$

Dalle condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda \operatorname{sen} \omega) + \frac{\partial}{\partial u}(\mu \cos \omega) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}(\lambda \cos \omega) - \frac{\partial}{\partial u}(\mu \operatorname{sen} \omega) = 0$$

si trae

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\mu, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v}\lambda.$$

Se deriviamo poi la seconda delle (α)

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{A}$$

rapporto ad u, v e poniamo

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \qquad H_2 = \frac{\partial H}{\partial \beta}, \tag{13*}$$

coll'osservare le (13) ne deduciamo i valori di $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$. Queste formole, riunite alle precedenti, danno luogo al seguente sistema lineare omogeneo per le quattro funzioni incognite α, β, λ, μ di u, v:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{H_1}{2A} \operatorname{sen} \omega - \frac{H_2}{2A} \cos \omega - \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu, \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{H_1}{2A} \cos \omega + \frac{H_2}{2A} \operatorname{sen} \omega + \frac{\partial \omega}{\partial u} \lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

dove ω è riguardata dapprima come funzione nota di u, v. Se formiamo ora le condizioni d'integrabilità del sistema (I), osservando che le derivate seconde di H rapporto ad α, β, le quali indichiamo con

$$H_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2}, \quad H_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad H_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2},$$

hanno per la (2) i valori costanti

$$H_{11} = 2 A_{22}, \qquad H_{12} = 2 A_{23}, \qquad H_{22} = 2 A_{33},$$

troviamo che ω deve unicamente soddisfare l'equazione a derivate parziali del 2.° ordine:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{A_{22} - A_{33}}{A} \operatorname{sen} \omega \cos \omega - \frac{A_{23}}{A} \cos \omega. \tag{I*}$$

Inversamente se ω è una soluzione di questa, il sistema (I) è illimitatamente integrabile ed ammette, come subito si vede, l'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 - \frac{H}{A} = \text{cost.}$$

Basta dunque scegliere i valori iniziali arbitrarii di α, β, λ, μ in guisa che si annulli la costante del secondo membro e resterà soddisfatta anche la condizione

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{A}. \tag{I'}$$

Ne risulterà così individuata una superficie $\overline{S}$ d'elemento lineare (1) dalle formole

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}'' = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}} \lambda \mu,$$

che seguono dalle (10). Osserviamo di passaggio che queste ultime formole dimostrano che: *In tutte le deformazioni della nostra superficie S il sistema coniugato permanente è isotermo-coniugato sulla superficie deformata S.*

2.° caso $A < 0$. In questo caso, essendo per le (7) Δ, Δ'' puramente immaginarii, le (10) dimostrano che si deve prendere $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$, e ponendo $A = -a^2$ la (11) diventa

$$\mu^2 + \lambda^2 = \frac{H}{A}. \tag{II'}$$

Procedendo come sopra, troviamo qui il sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{H_1}{2 a^2} \operatorname{sen} \omega + \frac{H_2}{2 a^2} \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu, \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{H_1}{2 a^2} \cos \omega + \frac{H_2}{2 a^2} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu,
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

colla condizione d'integrabilità data dalla equazione a derivate parziali per ω:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{A_{33} - A_{22}}{a^2} \operatorname{sen} \omega \cos \omega + \frac{A_{23}}{a^2} \cos 2\omega, \tag{II*}$$

la quale si riduce o alla $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0$ ovvero all'altra

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega,$$

da cui dipende la ricerca delle ordinarie superficie pseudosferiche. Inversamente se ω è una soluzione della (II*), il sistema (II) è illimitatamente integrabile ed ammette l'integrale quadratico

$$\mu^2 + \lambda^2 - \frac{H}{A} = \text{cost.}$$

Per soddisfare anche la (II') basterà quindi disporre dei valori iniziali di α, β, λ, μ in guisa che si annulli la costante del secondo membro nell'ultima equazione; dopo ciò ne risulterà individuata una deformata $\overline{S}$ della S corrispondente alle formole.

$$\overline{\Delta} = \frac{a}{\sqrt{H}} \lambda \mu, \qquad \overline{\Delta}'' = -\frac{a}{\sqrt{H}} \lambda \mu.$$

§ 5.

Caso del segno inferiore nella (1). Deformazioni di 1.ª specie.

Passando ora al caso che si adotti nella formola (1) il segno inferiore, avremo

$$D = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}}, \qquad D'' = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}},$$

ed essendo

$$\Delta\, d u^2 + \Delta''\, d v^2 = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}} (d \alpha^2 - d \beta^2),$$

ne dedurremo le formole

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} = 0 \qquad (14)$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2\right], \qquad \Delta'' = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2\right]. \qquad (15)$$

Procedendo come al § 3, troviamo ora le formole

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Delta}^2 &= \Delta^2 + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2\right] \\ \overline{\Delta}''^2 &= \Delta''^2 + \varepsilon' \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

e l'altra

$$\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right]+\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]+\varepsilon\,\varepsilon'\,\frac{H}{A}=0, \tag{17}$$

con $|\varepsilon|=|\varepsilon'|=1$. Trattiamo in questo paragrafo il caso di u, v reali (deformazioni di 1.ª specie), ove, per aver riguardo alle condizioni di realità della deformazione conviene osservare in primo luogo che i due binomii

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2,\qquad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2$$

hanno, a causa della (14), segno contrario. Possiamo evidentemente supporre positivo il primo, negativo il secondo; poniamo allora

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2=\lambda^2,\qquad \left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2=\mu^2, \tag{18}$$

dopo di che le (16) diventano per le (15)

$$\overline{\Delta}^2=\lambda^2\left[\frac{A}{H}\lambda^2+\varepsilon\right],\qquad \overline{\Delta}''^2=\mu^2\left[\frac{A}{H}\mu^2-\varepsilon'\right]$$

e la (7)

$$\varepsilon'\lambda^2-\varepsilon\mu^2+\varepsilon\,\varepsilon'\,\frac{H}{A}=0, \tag{17*}$$

onde le precedenti si scrivono

$$\overline{\Delta}^2=\overline{\Delta}''^2=\varepsilon\,\varepsilon'\,\frac{A}{H}\lambda^2\mu^2. \tag{16*}$$

L'ulteriore discussione porta a distinguere nuovamente due casi a seconda del segno di A.

1.º caso $A>0$. Allora per le (16*) dovranno essere ε, ε' concordanti e si potrà fare $\varepsilon=\varepsilon'=+1$ (*). Dopo di ciò la (17*) si scrive

$$\mu^2-\lambda^2=\frac{H}{A},$$

(*) L'ipotesi contraria $\varepsilon=\varepsilon'=-1$ equivarrebbe a scambiare (α,β), (λ,μ), (u,v).

e con un processo analogo a quelli sopra usati, troviamo il sistema completo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\lambda\cosh\theta,\quad \frac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\,\mathrm{senh}\,\theta,\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=-\frac{H_1}{2A}\cosh\theta-\frac{H_2}{2A}\,\mathrm{senh}\,\theta+\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu,\quad \frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\,\mathrm{senh}\,\theta,\quad \frac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\cosh\theta,\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\mu,\quad \frac{\partial\mu}{\partial v}=\frac{H_1}{2A}\,\mathrm{senh}\,\theta+\frac{H_2}{2A}\cosh\theta+\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$

colla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\frac{A_{22}+A_{33}}{A}\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta+\frac{A_{23}}{A}\cosh 2\theta.\qquad\text{(III*)}$$

2.° caso $A<0$. A causa delle (16*), (17*) bisogna prendere $\varepsilon=+1$, $\varepsilon'=-1$, e posto $A=-a^2$ si avrà

$$\lambda^2+\mu^2=\frac{H}{a^2}\cdot$$

In questo caso troviamo il sistema completo seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\lambda\cosh\theta,\quad \frac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\,\mathrm{senh}\,\theta,\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\frac{H_1}{2a^2}\cosh\theta+\frac{H_2}{2a^2}\,\mathrm{senh}\,\theta-\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu,\quad \frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\,\mathrm{senh}\,\theta,\quad \frac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\cosh\theta,\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\mu,\quad \frac{\partial\mu}{\partial v}=\frac{H_1}{2a^2}\,\mathrm{senh}\,\theta+\frac{H_2}{2a^2}\cosh\theta-\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda,
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IV)}$$

colla condizione d'integrabilità per θ:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{A_{22}+A_{33}}{a^2}\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta+\frac{A_{23}}{a^2}\cosh 2\theta.\qquad\text{(IV*)}$$

Notevole nelle equazioni (III*), (IV*) è il caso in cui si abbia

$$A_{22}+A_{33}=\pm 2A_{23};$$

allora esse si riducono alla nota forma di LIOUVILLE

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \pm \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = C e^{2\theta} \qquad (C \text{ cost.})$$

e si sanno integrare completamente.

§ 6.

DEFORMAZIONI DI SECONDA SPECIE.

Ormai non ci resta più che trattare le deformazioni di 2.ª specie, le quali si presentano solo (§ 2) nel caso attuale del segno inferiore nella (1), essendo di più $A > 0$.

Il sistema coniugato permanente, che diciamo (u_1, v_1), essendo allora immaginario, mentre la deformazione è, per ipotesi, reale, potremo assumere i parametri u_1, v_1 coniugati immaginarii e porre

$$u_1 = u + i v, \quad v_1 = u - i v,$$

con che le linee u, v verranno ad essere le assintotiche (reali) sopra $\overline{S}$.

Posto

$$\Omega = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u_1}\right)^2, \quad \overline{\Omega} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial v_1}\right)^2, \tag{19}$$

saranno Ω, $\overline{\Omega}$ immaginarie coniugate, e la (17) diventerà

$$\varepsilon' \Omega + \varepsilon \overline{\Omega} + \varepsilon \varepsilon' \frac{H}{A} = 0, \tag{20}$$

mentre le (16) daranno

$$\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta}''^2 = -\varepsilon \varepsilon' \frac{A}{H} \Omega \overline{\Omega}. \tag{21}$$

Ma si ha

$$\overline{\Delta}\, d u_1^2 + \overline{\Delta}''\, d v_1^2 = (\overline{\Delta} + \overline{\Delta}'')\, d u^2 + 2 i (\overline{\Delta} - \overline{\Delta}'')\, d u\, d v - (\overline{\Delta} + \overline{\Delta}'')\, d v^2;$$

e dovendo risultare $\overline{\Delta} + \overline{\Delta}''$, $i(\overline{\Delta} - \overline{\Delta}'')$, $\overline{\Delta}^2$ reali, saranno $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}''$ immaginarii puri coniugati, indi $\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta}''^2$ reale negativo. Le (21), essendo Ω, $\overline{\Omega}$ coniugate,

ed $A > 0$, $H > 0$, dimostrano che ε, ε' debbono avere lo stesso segno. Possiamo fare $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$, ed avremo per la (20)

$$\Omega + \overline{\Omega} = -\frac{H}{A}. \tag{22}$$

D'altronde la

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}\frac{\partial \alpha}{\partial v_1} = \frac{\partial \beta}{\partial u_1}\frac{\partial \beta}{\partial v_1}$$

ci dà

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2,$$

e la (22)

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 = -\frac{H}{A}, \qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 = \frac{H}{A}.$$

Ora, se poniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta + \mu \operatorname{senh} \theta, & \dfrac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh} \theta + \mu \cosh \theta \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \lambda \operatorname{senh} \theta - \mu \cosh \theta, & \dfrac{\partial \beta}{\partial v} = \lambda \cosh \theta - \mu \operatorname{senh} \theta \end{cases}$$

la relazione fra λ e μ diventa

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{H}{A}.$$

Derivando questo rapporto ad u, v e confrontando colle precedenti, ne deduciamo il sistema completo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta + \mu \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \lambda \operatorname{senh} \theta - \mu \cosh \theta \\
&\frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh} \theta + \mu \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \lambda \cosh \theta - \mu \operatorname{senh} \theta \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{H_1}{2A}\cosh \theta - \frac{H_2}{2A}\operatorname{senh} \theta + \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\frac{H_1}{2A}\operatorname{senh} \theta - \frac{H_2}{2A}\cosh \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{H_1}{2A}\operatorname{senh} \theta + \frac{H_2}{2A}\operatorname{senh} \theta + \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda, \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{H_1}{2A}\cosh \theta - \frac{H_2}{2A}\operatorname{senh} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

colla condizione d'integrabilità per θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{A_{22} + A_{33}}{2A} \cosh 2\theta + \frac{A_{23}}{A} \operatorname{senh} 2\theta = 0. \qquad (V^*)$$

Anche qui si osserverà che, se è soddisfatta la condizione

$$A_{22} + A_{33} = \pm 2 A_{23},$$

l'equazione precedente per θ assume la forma di Liouville e si integra completamente.

§ 7.

Casi particolari.

Applichiamo i risultati generali ottenuti nei paragrafi precedenti per la deformazione delle superficie d'elemento lineare (1) ai casi che più ci interessano nel seguito, in primo luogo all'ordinario paraboloide ellittico ed iperbolico.

a) Se scriviamo l'equazione del paraboloide ellittico sotto la solita forma $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, i parametri p, q essendo positivi, e poniamo

$$x = \sqrt{p} \cdot \alpha, \quad y = \sqrt{q}\, \beta, \quad z = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2),$$

ne deduciamo pel ds^2

$$ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2.$$

Questo ha la forma (1) corrispondente al segno superiore ed è

$$A = pq, \quad H = p\beta^2 + q\alpha^2 + pq.$$

Secondo i risultati del § 4, l'equazione (I*) da cui dipendono le deformazioni di questo paraboloide assume la forma

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \operatorname{sen} \omega \cos \omega.$$

Lasciando da parte il caso $p = q$ del paraboloide di rotazione, di cui già si conoscono tutte le deformate, supporremo per fissare le idee $p > q$ e sostituiremo al paraboloide dato un paraboloide simile pel quale si abbia

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1. \qquad (23)$$

Così l'equazione per ω assume la forma

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega ; \tag{A}$$

per ogni soluzione ω di questa si otterranno ∞^3 deformate del paraboloide integrando il sistema lineare omogeneo (I), che diventa qui in particolare:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\alpha}{p} \operatorname{sen} \omega - \frac{\beta}{q} \cos \omega - \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\alpha}{p} \cos \omega + \frac{\beta}{q} \operatorname{sen} \omega + \frac{\partial \omega}{\partial u} \lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

e disponendo inoltre dei valori iniziali delle funzioni incognite α, β, λ, μ per modo che sia soddisfatta, come è possibile, la condizione quadratica

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1. \tag{B*}$$

Ad ogni tale quaderna di soluzioni α, β, λ, μ corrisponde una superficie applicabile sul paraboloide ellittico, della quale si hanno, in termini finiti, le *equazioni intrinseche.*

b) Consideriamo ora il paraboloide iperbolico $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, e ponendo

$$x = \sqrt{p} \cdot \alpha, \quad y = \sqrt{q} \cdot \beta, \quad z = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2),$$

avremo

$$ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2,$$

formola che corrisponde alla (1) col segno inferiore, essendo ancora

$$A = pq, \quad H = p\beta^2 + q\alpha^2 + pq.$$

Supporremo inoltre scelte le dimensioni del paraboloide in guisa che i parametri p, q verifichino la condizione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{24}$$

Dovremo qui ulteriormente distinguere secondo che si tratta di una deformazione di 1.ª ovvero di 2.ª specie. Secondo il § 5, le deformazioni di 1.ª specie dipenderanno dall'equazione (III*) che diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \tag{C}$$

e dalla successiva integrazione del sistema lineare:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh\theta, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta, \\
\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = -\dfrac{\alpha}{p}\cosh\theta - \dfrac{\beta}{q}\operatorname{senh}\theta + \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\mu, \quad \dfrac{\partial \mu}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\
\dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh}\theta, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh\theta, \\
\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \quad \dfrac{\partial \mu}{\partial v} = \dfrac{\alpha}{p}\operatorname{senh}\theta + \dfrac{\beta}{q}\cosh\theta + \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\lambda,
\end{array}\right\} \tag{B}$$

colla condizione quadratica

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1. \tag{D*}$$

Per le deformazioni di 2.ª specie, secondo le formole del paragrafo precedente, risulta per θ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\cosh 2\theta = 0, \tag{E}$$

alla quale viene coordinato il sistema lineare omogeneo

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh\theta + \mu \operatorname{senh}\theta, \quad \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \lambda \operatorname{senh}\theta - \mu \cosh\theta \\
\dfrac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta + \mu \cosh\theta, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial v} = \lambda \cosh\theta - \mu \operatorname{senh}\theta \\
\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = -\dfrac{\alpha}{p}\cosh\theta - \dfrac{\beta}{q}\operatorname{senh}\theta + \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \\
\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = -\dfrac{\alpha}{p}\operatorname{senh}\theta - \dfrac{\beta}{q}\cosh\theta - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\mu \\
\dfrac{\partial \mu}{\partial u} = \dfrac{\alpha}{p}\operatorname{senh}\theta + \dfrac{\beta}{q}\cosh\theta + \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\lambda, \\
\dfrac{\partial \mu}{\partial v} = -\dfrac{\alpha}{p}\cosh\theta - \dfrac{\beta}{q}\operatorname{senh}\theta - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\lambda,
\end{array}\right\} \tag{F}$$

colla condizione quadratica

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1.$$

c) Nelle formole relative al paraboloide ellittico cangiamo β in $i\beta$; avremo per l'elemento lineare

$$d s^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - q)\, d\beta^2. \tag{25}$$

Se non si distingue il reale dall'immaginario, non abbiamo qui nulla di diverso dal caso *a*); non così dal punto di vista reale che noi esclusivamente consideriamo. Avendo α, β il significato di parametri reali, ed essendo p, q costanti positive, la determinazione delle superficie reali d'elemento lineare (25) rientra nel 2.° caso del § 5 e dipende dall'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \operatorname{senh} \theta \cosh \theta \tag{G}$$

e dalla successiva integrazione del sistema lineare

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh} \theta, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\alpha}{p} \cosh \theta + \frac{\beta}{q} \operatorname{senh} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh \theta, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\alpha}{p} \operatorname{senh} \theta + \frac{\beta}{q} \cosh \theta - \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{H}$$

colla condizione quadratica

$$\mu^2 + \lambda^2 = \frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - 1. \tag{H*}$$

d) Come ultimo caso particolare, consideriamo le superficie d'elemento lineare

$$d s^2 = 2\alpha\, d\alpha^2 \pm 2\beta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 \ (*). \tag{25*}$$

(*) È facile vedere che per le superficie di traslazione di questo elemento lineare le due curve generatrici, situate in piani perpendicolari, sono l'una una cicloide comune, l'altra una parabola semi-cubica coll'asse normale alla base della cicloide. A seconda del segno nella (25*) le due curve sono rivolte, l'una rispetto all'altra, in un senso o nel contrario.

Secondo che si adotta il segno superiore o l'inferiore, le formole dei §§ 4, 5 ci dimostrano che la determinazione della corrispondente classe di superficie applicabili dipende dall'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega,$$

o dell'altra

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = - \operatorname{senh} \theta \cosh \theta.$$

Queste sono le equazioni stesse che si presentano per determinare nello spazio ordinario le superficie di curvatura K costante negativa o positiva rispettivamente. Il nuovo metodo di Weingarten nella teoria dell'applicabilità spiega questo legame e dimostra anzi di più che dalle superficie di curvatura costante si deducono *con sole quadrature* le superficie d'elemento lineare (25*). Se poniamo infatti nelle formole di Weingarten (Vol. II, pag. 198)

$$\varphi = \frac{1}{2}(q^2 \pm p^2),$$

con chè l'equazione ivi segnata (IX) diventa $\rho_1 \rho_2 = \mp 1$, l'elemento lineare (VIII) ibid. prende la forma

$$d s^2 = 2 q d q^2 \pm 2 p d p d q + d p^2,$$

che è appunto la (25*).

§ 8.

Il teorema di permutabilità per le equazioni (A), (G).

Il nostro oggetto principale essendo lo studio delle deformazioni dei paraboloidi, dobbiamo in primo luogo occuparci della integrazione delle equazioni a derivate parziali del 2.° ordine che portano le segnature (A) (C), (E) nel paragrafo precedente, e successivamente, per una assegnata soluzione di una di queste, della integrazione del sistema lineare completo corrispondente (B), (D), (F).

Per il primo oggetto basterà che io richiami, completandole colla deduzione del *teorema di permutabilità*, le mie antiche ricerche sulle equazioni

a derivate parziali di questi tipi esposte in una Memoria del 1888 (*); ivi ho dimostrato che si può costruire per ciascuna di queste equazioni una teoria delle trasformazioni affatto analoga a quella delle trasformazioni di Bäcklund per l'equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \operatorname{sen} \omega.$$

Cominciamo dal richiamare le formole relative alla prima equazione (A)

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega, \tag{A}$$

la cui considerazione conviene associare a quella dell'altra equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta. \tag{G'}$$

Indicando con σ una costante arbitraria, consideriamo il seguente sistema di due equazioni simultanee del 1.° ordine per due funzioni incognite ω, θ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \cos \sigma \cos \omega \operatorname{senh} \theta - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \omega \cosh \theta \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \operatorname{sen} \sigma \cos \omega \operatorname{senh} \theta + \cos \sigma \operatorname{sen} \omega \cosh \theta. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Se (ω, θ) è una coppia di funzioni che le soddisfano, l'eliminazione di θ fra le (26) dimostra che ω soddisfa la (A); eliminando invece ω vediamo che θ è una soluzione della (G'). Inversamente se per θ poniamo nelle (26) una soluzione qualunque della (G'), le due equazioni simultanee (26) in ω sono compatibili ed, essendo soddisfatta identicamente la condizione d'integrabilità, dànno, integrate, una soluzione ω della (A) *contenente una costante arbitraria*. Analogamente se per ω poniamo nelle (26) una soluzione della (A), ne deduciamo una soluzione θ della (G') con una costante arbitraria. È ancora da osservarsi che prendendo per incognita $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ ovvero $\operatorname{tgh}\frac{\theta}{2}$, le (26) dànno un'equazione ai differenziali totali del tipo di Riccati, di cui basta conoscere una soluzione particolare per avere con quadrature l'integrale generale.

(*) *Sulle forme differenziali quadratiche indefinite.* (Memoria della R. Accademia dei Lincei, Serie 4.ª, Vol. V.)

Due soluzioni ω, θ delle (A), (G') rispettivamente, che siano fra loro legate dalle relazioni (26), si diranno, per abbreviare, trasformate l'una dell'altra *per la trasformazione* B_σ di Bäcklund. Da quanto abbiamo detto sopra risulta che nota una tale coppia (ω, θ), bastano successive quadrature per trovarne infinite altre, contenenti un numero via via crescente di costanti arbitrarie.

Ma, analogamente a quanto accade nella teoria delle trasformazioni di Bäcklund per le ordinarie superficie pseudosferiche, possiamo perfezionare questi risultati e risparmiare, sotto certe condizioni, le quadrature applicando il seguente *teorema di permutabilità* (cf. Vol. II, pag. 411):

Se θ_1, θ_2 *sono due soluzioni della* (G') *legate ad una medesima soluzione* ω_1 *della* (A) *da due trasformazioni* B_{σ_1}, B_{σ_2} *di* Bäcklund, *a costanti* σ_1, σ_2 *differenti, esiste una seconda soluzione* ω_2 *della* (A) *stessa calcolabile in termini finiti, che è legata alle stesse* θ_1, θ_2 *da due altre trasformazioni di* Bäcklund B'_{σ_1}, B'_{σ_2} *colle costanti* σ_1, σ_2 *invertite.*

Osserviamo subito che si può dare al teorema un'altra forma equivalente supponendo d'avere due soluzioni ω_1, ω_2 della (A) legate ad una medesima θ_1 di (G') da trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2}; ne risulterà, colle medesime formole, individuata una seconda soluzione θ_2 della (G') stessa legata ad ω_1, ω_2 rispettivamente da due trasformazioni B'_{σ_2}, B'_{σ_1}.

Verifichiamo il teorema nel modo seguente. Per ipotesi ω_1, θ_1, θ_2 sono legate fra loro ed alle costanti σ_1, σ_2 dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-\frac{\partial\theta_1}{\partial v}&=\cos\sigma_1\cos\omega_1\,\mathrm{senh}\,\theta_1-\mathrm{sen}\,\sigma_1\,\mathrm{sen}\,\omega_1\cosh\theta_1\\ \frac{\partial\omega_1}{\partial v}+\frac{\partial\theta_1}{\partial u}&=\mathrm{sen}\,\sigma_1\cos\omega_1\,\mathrm{senh}\,\theta_1+\cos\sigma_1\,\mathrm{sen}\,\omega_1\cosh\theta_1\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-\frac{\partial\theta_2}{\partial v}&=\cos\sigma_2\cos\omega_1\,\mathrm{senh}\,\theta_2-\mathrm{sen}\,\sigma_2\,\mathrm{sen}\,\omega_1\cosh\theta_2\\ \frac{\partial\omega_1}{\partial v}+\frac{\partial\theta_2}{\partial u}&=\mathrm{sen}\,\sigma_2\cos\omega_1\,\mathrm{senh}\,\theta_2+\cos\sigma_2\,\mathrm{sen}\,\omega_1\cosh\theta_2.\end{aligned}\right\}\quad(\beta)$$

Basterà dimostrare che esiste una funzione ω_2, la quale soddisfa simultaneamente le quattro equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega_2}{\partial u}-\frac{\partial\theta_1}{\partial v}&=\cos\sigma_2\cos\omega_2\,\mathrm{senh}\,\theta_1-\mathrm{sen}\,\sigma_2\,\mathrm{sen}\,\omega_2\cosh\theta_1\\ \frac{\partial\omega_2}{\partial v}+\frac{\partial\theta_1}{\partial u}&=\mathrm{sen}\,\sigma_2\cos\omega_2\,\mathrm{senh}\,\theta_1+\cos\sigma_2\,\mathrm{sen}\,\omega_2\cosh\theta_1\end{aligned}\right\}\quad(\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega_2}{\partial u}-\frac{\partial \theta_2}{\partial v}&=\cos\sigma_1\cos\omega_2\,\mathrm{senh}\,\theta_2-\mathrm{sen}\,\sigma_1\,\mathrm{sen}\,\omega_2\cosh\theta_2\\ \frac{\partial \omega_2}{\partial v}+\frac{\partial \theta_2}{\partial u}&=\mathrm{sen}\,\sigma_1\cos\omega_2\,\mathrm{senh}\,\theta_2+\cos\sigma_1\,\mathrm{sen}\,\omega_2\cosh\theta_2\,.\end{aligned}\right\}\qquad(\beta')$$

Intanto sottraendo la prima delle (α) dalla prima delle (β), indi la seconda dalla seconda, e medesimamente operando sulle (α'), (β'), il confronto dei risultati ci dà due equazioni lineari per $\cos\omega_2$, $\mathrm{sen}\,\omega_2$, che risolute dànno con un semplice calcolo le formole:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\omega_2-\omega_1)&=\frac{\cos(\sigma_1-\sigma_2)\cosh(\theta_1-\theta_2)-1}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cos(\sigma_1-\sigma_2)}\\ \mathrm{sen}\,(\omega_2-\omega_1)&=\frac{\mathrm{sen}\,(\sigma_1-\sigma_2)\,\mathrm{senh}\,(\theta_1-\theta_2)}{\cosh(\theta_1-\theta_2)-\cos(\sigma_1-\sigma_2)}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

Queste sono in effetto concordanti, poichè la somma dei quadrati dei secondi membri è $=1$; esse possono sostituirsi coll'unica equivalente:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).\qquad(27^*)$$

Ed ora si verifica subito con queste formole, tenendo conto delle (α), (β), che la funzione ω_2, così determinata in termini finiti, soddisfa le (α') e conseguentemente anche le (β'). Il teorema di permutabilità è dunque dimostrato.

Ed ora basta ripetere le note deduzioni per le superficie pseudosferiche (Vol. II, pag. 17) per dedurne che: *quando per una data soluzione* ω *della* (A) *si sappia integrare il sistema* (26), *per qualunque valore della costante* σ, *l'applicazione successiva ed illimitata della trasformazione di* BÄCKLUND *richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

§ 9.

Il teorema di permutabilità per le equazioni (C), (E).

Proprietà perfettamente analoghe a quelle sopra stabilite valgono per le due equazioni:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta,\qquad(C)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \cosh 2\omega = 0; \tag{E}$$

ma questa volta la trasformazione di Bäcklund porta da una soluzione θ od ω della (C) o della (E) ad un'altra soluzione della equazione stessa.

1) Per l'equazione (C) le formole della trasformazione di Bäcklund possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -(\cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1 + \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \quad \cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 + \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \theta_1, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

essendo σ una costante arbitraria che diremo il parametro della trasformazione B_σ di Bäcklund. Se θ è una soluzione della (C), le equazioni (28) in θ_1 costituiscono un sistema illimitatamente integrabile, il cui integrale generale θ_1, con una costante arbitraria, dà una nuova soluzione della (C) stessa.

Senza ripetere qui la deduzione di tutte le altre proprietà analoghe a quelle osservate nel paragrafo precedente basterà enunciare la più importante, data dal teorema di permutabilità: *Se θ_1, θ_2 sono due soluzioni della* (C) *legate alla medesima θ dalle trasformazioni di* Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2}, *a costanti $\sigma_1 \sigma_2$ distinte, esiste una quarta soluzione θ_3 legata a θ_1, θ_2 rispettivamente dalle trasformazioni B'_{σ_2}, B'_{σ_1} colle costanti σ_1, σ_2 invertite.*

La dimostrazione si fa in modo del tutto simile a quello del § 8, e si trova che questa quarta soluzione θ_3 è determinata in termini finiti dalle relazioni concordanti

$$\left.\begin{aligned} \cosh(\theta_3 - \theta) &= \frac{\cosh(\sigma_1 - \sigma_2)\cosh(\theta_1 - \theta_2) - 1}{\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)} \\ \operatorname{senh}(\theta_3 - \theta) &= \frac{\operatorname{senh}(\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{senh}(\theta_1 - \theta_2)}{\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

che possono compendiarsi nell'unica

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \coth\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right). \tag{25*}$$

2) Per l'equazione (E) le formole della trasformazione di Bäcklund possono scriversi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} &= \operatorname{tg} \sigma \cosh(\omega_1 + \omega) \\ \frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} &= -\cot \sigma \operatorname{senh}(\omega_1 - \omega), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

ed abbiamo ancor qui un teorema di permutabilità contenuto, con notazioni analoghe alle superiori, nella formola

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\omega_3 - \omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\sigma_1 + \sigma_2)}{\operatorname{sen}(\sigma_1 - \sigma_2)} \operatorname{tgh}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right).$$

§ 10.

Superficie dello spazio Euclideo di $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$.

Cogli sviluppi dei due paragrafi precedenti abbiamo imparato a trovare quante si vogliano soluzioni delle nostre equazioni fondamentali senza altro calcolo di integrazione che quello necessario per integrare *la prima* equazione di Riccati nella trasformazione B_σ di Bäcklund. Ci volgiamo ora alla parte più essenziale della nostra ricerca, cioè alla integrazione dei sistemi lineari (B), (D), (F). Limitandoci ai primi due casi, dimostreremo che *bastano quadrature per integrare i sistemi* (B), (D). Così per le superficie applicabili sul paraboloide ellittico, e per le deformate di 1.ª specie del paraboloide iperbolico, raggiungeremo il risultato enunciato nella prefazione e potremo con sole quadrature determinare, per mezzo delle loro equazioni intrinseche, quante si vogliano deformate dei paraboloidi.

Al nostro oggetto è necessario riprendere dalla mia Memoria citata al § 8 le formole fondamentali relative alle superficie dello spazio parabolico col ds^2 indefinito

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$

e questo faremo presentando ora le formole sotto un aspetto più generale.

Consideriamo nel detto spazio una superficie definita dalle formole

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

e sia

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

la sua prima forma quadratica fondamentale. Questa potrà essere definita ($EG - F^2 > 0$), ovvero indefinita ($EG - F^2 < 0$); corrispondentemente di-

remo che la superficie, o la porzione di essa considerata, è di prima ovvero di seconda specie. Sulle superficie di seconda specie le linee di lunghezza nulla sono reali, immaginarie invece su quelle di prima specie.

a) *Superficie di 1.ª specie.*

Se la superficie è di 1.ª specie, poniamo

$$\left.\begin{aligned} X=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad Y=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \\ Z=\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

onde le relazioni

$$X^2+Y^2-Z^2=-1. \tag{32*}$$

Introduciamo poi, come seconda forma quadratica fondamentale, la seguente

$$dz\,dZ-dx\,dX-dy\,dY=D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2,$$

per cui risulta

$$\left.\begin{aligned} D&=X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ D'&=X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}-Z\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ D''&=X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}-Z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Procedendo precisamente come nel caso ordinario (Vol. I, pag. 115), si trovano le formole fondamentali

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}&=\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}-DX \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}&=\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}-D'X \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}&=\begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}-D''X, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u}&=\frac{F D'-G D}{E G-F^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{F D-E D'}{E G-F^2}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial X}{\partial v}&=\frac{F D''-G D'}{E G-F^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{F D'-E D''}{E G-F^2}\frac{\partial x}{\partial v},\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

colle analoghe per y, z; Y, Z. Si osserverà che le ultime coincidono formalmente colle ordinarie corrispondenti dello spazio Euclideo, e le prime (34) ne differiscono solo pel segno cangiato nell'ultimo termine del secondo membro. Scrivendo ora le condizioni di integrabilità per il sistema (34), (35) si trovano le equazioni di Codazzi per D, D', D'' che conservano la loro forma consueta, mentre l'equazione di Gauss viene sostituita dall'altra

$$\frac{D D''-D'^2}{E G-F^2}=-K,\tag{36}$$

dove K indica la curvatura della prima forma fondamentale, che differisce dall'ordinaria equazione di Gauss solo pel segno nel secondo membro.

b) *Superficie di 2.ª specie.*

Nel caso di una superficie di 2.ª specie poniamo

$$\left.\begin{aligned}X=\frac{1}{\sqrt{F^2-E G}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad Y=\frac{1}{\sqrt{F^2-E G}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\\ Z=\frac{-1}{\sqrt{F^2-E G}}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

con che la relazione fra X, Y, Z diventa

$$X^2+Y^2-Z^2=1.\tag{37*}$$

Se facciamo ancora le posizioni (33), nelle formole corrispondenti alle (34) sarà nuovamente cangiato il segno dell'ultimo termine, con che queste formole riacquistano la forma stessa che nello spazio Euclideo, ed invariate resteranno pure le (35). Così pure le equazioni di Codazzi e di Gauss avranno la forma ordinaria, poichè la (36) ritorna ad assumere la forma

$$\frac{D D''-D'^2}{E G-F^2}=K.\tag{36*}$$

Tanto per le superficie di 1.ª, come per quelle di 2.ª specie, le equazioni di Codazzi e di Gauss dànno le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare i coefficienti delle due forme quadratiche

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

affinchè esista una superficie (di 1.ª o di 2.ª specie) che le ammetta rispettivamente per prima e per seconda forma quadratica fondamentale; la superficie ne risulta poi individuata, a meno di movimenti nel rispettivo spazio.

Ricordiamo ancora che le *linee di curvatura* sono anche qui le linee integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv, & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0;$$

esse sono certamente reali per le superficie di 1.ª specie, mentre per quelle di 2.ª possono essere reali od immaginarie.

Se si prendono a linee coordinate (u, v) le linee di curvatura, si ha

$$F = 0, \quad D' = 0$$

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D'' = -\frac{G}{r_1},$$

indicando r_1, r_2 i due raggi principali di curvatura.

§ 11.

Sistemi illimitatamente integrabili collegati alle superficie di curvatura costante.

I sistemi lineari omogenei (B), (D), alla cui integrazione è diretta la nostra ulteriore ricerca, si identificano, come dimostreremo, con quei sistemi di equazioni illimitatamente integrabili che si collegano alla teoria delle trasformazioni di Bäcklund per le superficie a curvatura costante K appartenenti allo spazio di $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$; di questi sistemi dobbiamo quindi in primo luogo trattare.

Supponiamo d'avere in questo spazio una superficie di curvatura costante K colle due forme differenziali quadratiche fondamentali

$$E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2$$
$$D\,d\,u^2 + 2\,D'\,d\,u\,d\,v + D''\,d\,v^2.$$

Essendo Φ, W due funzioni incognite di u, v consideriamo il sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\;1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a\,E\,\Phi + c\,D\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a\,F\,\Phi + c\,D'\,W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\;2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a\,G\,\Phi + c\,D''\,W
\end{aligned}\right\} \tag{K}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{F\,D' - G\,D}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{F\,D - E\,D'}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{F\,D'' - G\,D'}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{F\,D' - E\,D''}{E\,G - F^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{K*}$$

dove i simboli di Christoffel sono costruiti per la prima forma fondamentale ed a, c indicano due costanti. Prendendo le costanti a, c legate da una conveniente relazione, il sistema (K), (K^*) risulta illimitatamente integrabile. Se la superficie S di curvatura costante K è di 2.ª specie, la relazione da porsi fra le costanti a, c è la seguente

$$a = (c - 1)\,K. \tag{38}$$

E infatti le equazioni di Codazzi e di Gauss avendo qui la stessa forma che nello spazio ordinario ed il sistema (K), (K^*), come pure la relazione (38) fra le costanti, rientrando nelle formole generali date al § 303 e seguenti delle *Lezioni* (Vol. II), è chiaro che le condizioni d'illimitata integrabilità si troveranno anche qui identicamente soddisfatte per la (38).

Quando la superficie S di curvatura costante K è di 1.ª specie, l'unica differenza dal caso precedente è portata dal segno cangiato nella equazione (36) di Gauss. Il calcolo eseguito al § 304 delle *Lezioni* prova che basta perciò modificare la relazione (38) fra le costanti a, c nell'altra

$$a = -(c + 1)\,K. \tag{38*}$$

Conviene ancora ricordare (l. c.) che il sistema illimitatamente integra-

bile (K), (K^*) possiede l'integrale quadratico:

$$\Delta_1 \Phi = a\,\Phi^2 - c\,W^2 + \text{cost.}, \tag{K'}$$

essendo $\Delta_1 \Phi$ il parametro differenziale primo di Φ, calcolato rispetto alla prima forma $E\,d\,u^2 + 2\,F\,d\,u\,d\,v + G\,d\,v^2$.

§ 12.

Riduzione del sistema lineare (B) § 7, relativo al paraboloide ellittico.

Essendo ω una soluzione dell'equazione (A) § 7

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \text{sen}\,\omega\cos\omega,$$

l'elemento lineare

$$d\,s^2 = \cos^2\omega\,d\,u^2 - \text{sen}^2\omega\,d\,v^2 \tag{39}$$

appartiene ad una superficie S di seconda specie, dello spazio con

$$d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2 - d\,z^2,$$

riferita alle sue linee di curvatura (u, v) e colla curvatura $K = -1$ (*). E infatti, i valori dei simboli di Christoffel per la forma differenziale (39) essendo

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix} &= -\text{tg}\,\omega\frac{\partial \omega}{\partial u}, & \begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix} &= -\text{tg}\,\omega\frac{\partial \omega}{\partial v}, & \begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix} &= \text{tg}\,\omega\frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix} &= -\cot\omega\frac{\partial \omega}{\partial v}, & \begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix} &= \cot\omega\frac{\partial \omega}{\partial u}, & \begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix} &= \cot\omega\frac{\partial \omega}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

si soddisfano le equazioni di Codazzi e di Gauss ponendo

$$D = D'' = -\text{sen}\,\omega\cos\omega, \quad D' = 0. \tag{41}$$

Costruendo ora per la nostra superficie S il sistema illimitatamente integrabile (K), (K^*) del paragrafo precedente, osservando le (40), (41), ve-

(*) Cf. la mia Memoria citata dei Lincei (Serie 4.ª, Tomo V) n. 22.

diamo che si può scrivere sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) &= -\frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + a\cos\omega\,.\,\Phi - c\operatorname{sen}\omega\,.\,W \\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v} \\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) &= -\frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u} \\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - a\operatorname{sen}\omega\,.\,\Phi - c\cos\omega\,.\,W
\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \operatorname{tg}\omega\frac{\partial\Phi}{\partial u},\qquad \frac{\partial W}{\partial v} = -\cot\omega\frac{\partial\Phi}{\partial v};\qquad(42^*)$$

e la relazione (38) fra le costanti a, c, a causa di $K=-1$, diventerà

$$a+c=1.\qquad(43)$$

Confrontiamo ora questo sistema (42), (42*) col sistema (B) § 7, la cui integrazione fa conoscere le deformate del paraboloide ellittico, corrispondenti alla soluzione ω scelta della (A).

Se facciamo le posizioni:

$$\alpha=-W,\quad \beta=\Phi,\quad \lambda=\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad \mu=\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\qquad(44)$$

$$a=-\frac{1}{q},\quad c=\frac{1}{p},\qquad(45)$$

vediamo appunto che i due sistemi si cangiano l'uno nell'altro. E si noti che la relazione (43) fra le costanti a, c si muta alla sua volta, a causa delle (45), nella relazione (23) § 7

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=1,$$

che abbiamo posto fra i parametri p, q del paraboloide. È ben naturale che anche la relazione quadratica che segue dalla formola generale (K') del paragrafo precedente:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+a\,\Phi^2-c\,W^2=\text{cost.}\qquad(46)$$

trovasi in accordo colla (B*) § 7, cui soddisfano α, β, λ, μ:

$$\mu^2-\lambda^2-\frac{\alpha^2}{p}-\frac{\beta^2}{q}=\mp 1;$$

e per farle coincidere basta rendere $=1$ la costante del secondo membro nella (46), disponendo dei valori iniziali di Φ, W, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

Da tutto ciò raccogliamo il risultato: *Per determinare, per mezzo delle loro equazioni intrinseche, le* ∞^3 *deformate del paraboloide ellittico corrispondente ad una data soluzione* ω *della equazione* (A): $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\omega\cos\omega$, *basta saper integrare il sistema* (42), (42*), *associato alla corrispondente superficie pseudosferica di seconda specie, rendendo* $=1$ *la costante del secondo membro nell'integrale quadratico* (46).

§ 13.

Riduzione del sistema lineare (D) § 7 per il paraboloide iperbolico.

Una riduzione perfettamente analoga andiamo ad operare nel sistema (D) del § 7; la cui integrazione fa conoscere le ∞^3 deformate (di 1.ª specie) del paraboloide iperbolico, corrispondenti ad una soluzione θ dell'equazione (C)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}=\operatorname{senh}\theta\cosh\theta. \tag{C}$$

Soddisfacendo θ alla (C), l'elemento lineare

$$d s^2=\cosh^2\theta\, d u^2-\operatorname{senh}^2\theta\, d v^2 \tag{47}$$

appartiene ad una superficie S di seconda specie colla curvatura $K=+1$ le cui linee di curvatura sono le u, v. Infatti i valori dei simboli di Christoffel per la forma differenziale (47) sono

$$\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix}=\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u},\qquad \begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}=\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}=\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial v},\qquad \begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}=\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

e si soddisfano le equazioni di Codazzi e di Gauss ponendo

$$D=-\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,\quad D'=+\operatorname{senh}\theta\cosh\theta,\quad D'=0.$$

Il sistema illimitatamente integrabile (K), (K*) § 11 assume in conseguenza la forma:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right] &= \frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+a\cosh\theta\,.\,\Phi-c\operatorname{senh}\theta\,.\,W\\
\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right] &= \frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\
\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right] &= \frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\\
\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right] &= \frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}-a\operatorname{senh}\theta\,.\,\Phi+c\cosh\theta\,.\,W
\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\operatorname{tgh}\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial u},\qquad \frac{\partial W}{\partial v}=\coth\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial v},\qquad(48^*)$$

e la relazione (38) § 11 fra le costanti a, c, essendo qui $K=+1$, diventa

$$c-a=1.\qquad(49)$$

Ora identifichiamo il presente sistema (48), (48*) col sistema (D) § 7 ponendo

$$\alpha=\Phi,\quad \beta=W,\quad \lambda=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad \mu=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\qquad(50)$$

$$a=-\frac{1}{p},\quad c=\frac{1}{q};\qquad(51)$$

e si noti ancor qui che la relazione (49) fra a e c equivale per le (51) appunto alla relazione (24) § 7: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, posta fra i parametri del paraboloide.

Se paragoniamo poi la relazione quadratica che segue dalla generale (K′) § 11

$$\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right]^2-\left[\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right]^2+a\,\Phi^2-c\,W^2=\text{cost.},\qquad(52)$$

colla (D*) dal § 7

$$\mu^2-\lambda^2=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+1,$$

vediamo che anche qui sono da scegliersi i valori iniziali di Φ, W, $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ in guisa che la costante del secondo membro nella (52) risulta $=1$.

Dopo ciò è chiaro, senza che ne ripetiamo l'enunciato, che vale nel caso attuale una conclusione perfettamente analoga a quella della fine del paragrafo precedente, sostituendo al paraboloide ellittico l'iperbolico ed al sistema (42), (42*) l'altro (48), (48*).

§ 14.

Riduzione alla ricerca delle soluzioni speciali (Φ, W).

Abbiamo ridotto la ricerca delle deformazioni del paraboloide ellittico, e quella delle deformazioni di 1.ª specie del paraboloide iperbolico, alla integrazione del sistema completo (K), (K*) § 11 per le superficie di seconda specie a curvatura $K = -1$ o $K = +1$ rispettivamente, dello spazio di $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$, dove la integrazione deve essere eseguita per modo che la costante del 2.° membro nell'integrale quadratico (K') riceva il valore -1.

L'attuale problema riduciamo ora ulteriormente alla ricerca di quelle soluzioni (Φ, W) del sistema (K), (K*) per le quali la detta costante è nulla, che soddisfano cioè alla relazione quadratica

$$\Delta_1 \Phi = a\,\Phi^2 - c\,W^2.$$

Tali soluzioni si diranno per brevità *soluzioni speciali*.

Siccome il sistema (K), (K*) è lineare omogeneo, ed il suo integrale comporta *quattro* costanti arbitrarie, se diciamo

$$(\Phi_1, W_1), \quad (\Phi_2, W_2), \quad (\Phi_3, W_3), \quad (\Phi_4, W_4)$$

quattro coppie di soluzioni particolari del sistema, tali soltanto che sia diverso da zero il determinante:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad (53)$$

si vede subito che le formole

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 + c_4 \Phi_4 \\ W &= c_1 W_1 + c_2 W_2 + c_3 W_3 + c_4 W_4\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

dove c_1, c_2, c_3, c_4, sono quattro costanti arbitrarie, dànno l'integrale generale del sistema. E invero, assegnati ad arbitrio, per una particolare coppia $u = u_0$, $v = v_0$ delle variabili, i valori di Φ, W, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, potremo sempre determinare nelle (54) i valori da darsi a c_1, c_2, c_3, c_4.

Ora per queste quattro coppie fondamentali di soluzioni

$$(\Phi_i, \ W_i) \ i = 1, \ 2, \ 3, \ 4$$

possiamo assumere quattro soluzioni speciali, poichè i valori iniziali per una soluzione speciale (Φ, W) essendo vincolati dalla sola relazione

$$\Delta_1 \Phi = a \Phi^2 - c W^2,$$

è chiaro che non può annullarsi il determinante (53) per quattro soluzioni speciali qualunque.

È facile anzi vedere che basta la conoscenza di due soluzioni speciali $(\Phi_1 W_1)$, (Φ_2, W_2) per comporne una soluzione

$$\Phi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2, \quad W = c_1 W_1 + c_2 W_2 \tag{55}$$

della specie da noi richiesta, per la quale cioè risulti

$$\Delta_1 \Phi = a \Phi^2 - c W^2 - 1.$$

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che essendo (Φ_1, W_1), (Φ_2, W_2) due coppie di soluzioni qualunque del sistema (K), (K*), se si indica con $\nabla(\Phi_1, \Phi_2)$ il parametro differenziale misto di Φ_1, Φ_2, costruito rispetto alla prima forma fondamentale $E\,du^2 + 2' F\,du\,dv + G\,dv^2$, si ha in virtù del sistema stesso (K), (K*), la relazione

$$\nabla(\Phi_1, \Phi_2) = a \Phi_1 \Phi_2 - c W_1 W_2 + \gamma, \tag{56}$$

essendo γ una costante. Ora per la Φ calcolata dalla (55) abbiamo:

$$\Delta_1 \Phi = c_1^2 \Delta_1 \Phi_1 + c_2^2 \Delta_1 \Phi_2 + 2 c_1 c_2 \nabla(\Phi_1, \Phi_2).$$

Se supponiamo che (Φ_1, W_1) (Φ_2, W_2) siano soluzioni speciali, abbiamo

$$\Delta_1 \Phi_1 = a \Phi_1^2 - c W_1^2, \quad \Delta_1 \Phi_2 = a \Phi_2^2 - c W_2^2$$

e quindi per le (55), (56)

$$\Delta_1 \Phi - a \Phi^2 + c W^2 = 2 c_1 c_2 . \gamma. \tag{56*}$$

Il caso che sia $\gamma = 0$ può avvenire, come è chiaro, solo *eccezionalmente* per coppie di soluzioni speciali scelte in particolare relazione fra loro; supposto dunque $\gamma \neq 0$, potremo, scegliendo opportunamente c_1, c_2, dare alla costante $2 c_1 c_2 \gamma$ del 2.° membro nella (56*) il valore che più ci piace, in particolare il valore -1 richiesto.

§ 15.

Ricerca delle soluzioni speciali pel sistema (42), (42*) § 12.

La nostra ricerca essendo ormai ridotta a costruire le soluzioni speciali del sistema (K), (K*), dimostreremo che basta applicare convenientemente le formole del teorema di permutabilità (§§ 8, 9) per dedurne *con quadrature* le soluzioni speciali richieste.

La via da tenersi per conseguire questo risultato finale ci viene indicata dalle cognizioni acquistate nello studio del problema d'inversione dei teoremi di Guichard, nella teoria delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante dell'ordinario spazio Euclideo. Senza addentrarci qui nel raffronto geometrico fra il caso attuale dello spazio di $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ ed il caso ordinario, raffronto nel quale apparirebbe completa l'analogia delle proprietà nei due casi, basterà al nostro scopo partire dai risultati definitivi già noti per lo spazio Euclideo e dimostrare che essi sussistono, sotto la stessa forma, per il caso che ora ci interessa.

Cominciando in questo paragrafo dal caso del paraboloide ellittico, prendiamo una soluzione ω della equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \text{sen}\, \omega \cos \omega. \tag{A}$$

e consideriamo due sue trasformate di Bäcklund (§ 8) θ, θ_1 per mezzo di due trasformazioni B_σ, $B_{-\sigma}$, nelle quali la costante σ abbia valori eguali e di segno contrario.

Consideriamo in fine la seconda soluzione ω_1 della (A) che si ottiene,

secondo il teorema di permutabilità, dalla formola (27*) § 8

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}\right)=\operatorname{tg}\sigma\coth\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right), \tag{57}$$

e dimostriamo che se nel sistema (42), (42*) § 12) si dànno alle costanti a, c i valori

$$a=\operatorname{sen}^2\sigma,\quad c=\cos^2\sigma, \tag{58}$$

in armonia colla relazione (43) $a+c=1$, potremo determinare *con una quadratura* una coppia (Φ, W) di soluzioni speciali tali che si abbia

$$W=\Phi\operatorname{tg}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right). \tag{59}$$

Intanto dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial v}&=\cos\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta\\ \frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}&=\operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{senh}\theta+\cos\sigma\operatorname{sen}\omega\cosh\theta\end{aligned}\right\}. \tag{d}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial v}&=\cos\sigma\cos\omega_1\operatorname{senh}\theta+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega_1\cosh\theta\\ \frac{\partial\omega_1}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}&=-\operatorname{sen}\sigma\cos\omega_1\operatorname{senh}\theta+\cos\sigma\operatorname{sen}\omega_1\cosh\theta\end{aligned}\right\} \tag{d*}$$

deduciamo per sottrazione le formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\omega-\omega_1)}{\partial u}&=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega+\omega_1}{2}\right)\left[\cos\sigma\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\operatorname{senh}\theta+\right.\\ &\qquad\left.+\operatorname{sen}\sigma\cos\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\cosh\theta\right]\\ \frac{\partial(\omega-\omega_1)}{\partial v}&=2\cos\left(\frac{\omega+\omega_1}{2}\right)\left[\cos\sigma\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\cosh\theta+\right.\\ &\qquad\left.+\operatorname{sen}\sigma\cos\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\operatorname{senh}\theta\right].\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Ammesso per un momento la possibilità di soddisfare, nel modo anzidetto, il sistema (42), (42*) § 12, basta derivare la (59) rapporto ad u, v, avendo riguardo alle (42*) ed alle superiori (60) per dedurne le formole:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\log\Phi}{\partial u}&=-\cos\omega\left[\cos\sigma\operatorname{tg}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\operatorname{senh}\theta+\operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\right]\\ \frac{\partial\log\Phi}{\partial v}&=-\operatorname{sen}\omega\left[\cos\sigma\operatorname{tg}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\cosh\theta+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\right].\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

La condizione d'integrabilità per queste:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\cos\sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\cos\omega \operatorname{senh}\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\cosh\theta\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left[\cos\sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\operatorname{sen}\omega\cosh\theta + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\theta\right]$$

si trova identicamente soddisfatta, in virtù delle (d), (d*), per cui dalle (61) si ha così Φ *con una quadratura* (a meno di un fattore costante). Ed ora andiamo a verificare che questo valore di Φ e la W, data in termini finiti dalla (59), costituiscono una coppia di soluzioni speciali per il sistema (42), (42*), ove a, c abbiano i valori (58). Intanto, pel modo stesso che abbiamo tenuto per trovare le (61), verranno ad essere soddisfatte le (42*). Ed ora, se scriviamo le (61) sotto la forma equivalente:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u} &= \operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\,\Phi + \cos\sigma\operatorname{senh}\theta\,W \\ -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v} &= \operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\,\Phi + \cos\sigma\cosh\theta\,W, \end{aligned}\right.$$

e deriviamo rapporto ad u, v, tenendo conto delle (42*), vediamo facilmente che anche le (42) risultano soddisfatte. In fine, quadrando e sottraendo le formole superiori, deduciamo

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 = \cos^2\sigma\,W^2 - \operatorname{sen}^2\sigma\,\Phi^2 = c\,W^2 - a\,\Phi^2;$$

dunque la costante del secondo membro nella (46) ha qui il valore zero e la coppia (Φ, W) è una coppia di soluzioni speciali c. d. d.

§ 16.

Ricerca delle soluzioni speciali pel sistema (48), (48*) § 13.

Consideriamo quattro soluzioni θ, θ_1, θ_2, θ_3 della equazione (C)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh}\theta\cosh\theta,$$

che stiano fra di loro nella relazione del teorema di permutabilità al § 9, i valori delle costanti σ_1, σ_2 essendo eguali e di segno contrario, diciamo $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$. Se scriviamo le formole corrispondenti alle (28) § 9:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -(\cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1)\\
\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1\\
\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \theta_3}{\partial v} &= -\cosh\sigma \operatorname{senh}\theta_3 \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta_3 \operatorname{senh}\theta_1\\
\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta_3}{\partial u} &= \cosh\sigma \cosh\theta_3 \operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta_3 \cosh\theta_1,
\end{aligned}\right\} \quad (62)$$

per sottrazione ne deduciamo le altre:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\theta-\theta_3)}{\partial u} &= 2\operatorname{senh}\left(\frac{\theta+\theta_3}{2}\right)\left[\cosh\sigma \operatorname{senh}\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right)\operatorname{senh}\theta_1 + \right.\\
&\qquad \left. + \operatorname{senh}\sigma \cosh\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right)\cosh\theta_1\right]\\
\frac{\partial(\theta-\theta_3)}{\partial v} &= -2\cosh\left(\frac{\theta+\theta_3}{2}\right)\left[\cosh\sigma \operatorname{senh}\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right)\cosh\theta_1 + \right.\\
&\qquad \left. + \operatorname{senh}\sigma \cosh\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right)\operatorname{senh}\theta_1\right].
\end{aligned}\right\} \quad (62^*)$$

Dimostriamo ora che, dando nel sistema (48) (48*) § 13 alle costanti a, c i valori

$$a = \operatorname{senh}^2\sigma, \quad c = \cosh^2\sigma, \tag{63}$$

in armonia colla relazione (49): $c - a = 1$ fra le costanti, si potrà determinare una coppia di soluzioni speciali Φ, W tali che si abbia

$$W = \Phi \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right). \tag{64}$$

Procedendo come al paragrafo precedente, deriviamo quest'ultima rapporto ad u, v, tenendo conto delle (48*) § 13) e delle superiori (62*); ne dedurremo così le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \log\Phi}{\partial u} &= \cosh\theta\left[\cosh\sigma \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right)\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta_1\right]\\
\frac{\partial \log\Phi}{\partial a} &= -\operatorname{senh}\theta\left[\cosh\sigma \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta-\theta_3}{2}\right)\cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta_1\right].
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Ma siccome la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\cosh\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1\,\mathrm{tgh}\left(\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)+\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left[\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1\,\mathrm{tgh}\left(\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)+\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1\right]=0$$

trovasi identicamente soddisfatta, a causa delle (62), (62*), si vede che si avrà di qui Φ con una quadratura, indi W in termini finiti dalle (64).

Ora se scriviamo le (65) sotto la forma equivalente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}&=\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta_1\,.\,\Phi+\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta_1\,.\,W\\ \frac{1}{\mathrm{senh}\,\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}&=-\,\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta_1\,.\,\Phi-\cosh\sigma\cosh\theta_1\,.\,W,\end{aligned}\right\}\quad(65^*)$$

e deriviamo queste rapporto ad u, v, tenendo conto delle (65*) stesse e delle (48*), troviamo che anche le (48) sono soddisfatte, ove si diano alle costanti a, c i valori (63).

Inoltre, quadrando e sottraendo le (65*), deduciamo

$$\left(\frac{1}{\mathrm{senh}\,\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2=\cosh^2\sigma\,W^2-\mathrm{senh}^2\sigma\,\Phi^2=c\,W^2-a\,\Phi^2,$$

che confrontata colla (42) § 18 dimostra che per la coppia (Φ, W) di soluzioni così calcolate la costante del secondo membro è nulla, cioè le soluzioni sono speciali c. d. d.

§ 17.

Deformazioni del paraboloide ellittico.

Un ultimo passo ci resta da compiere onde poter applicare i risultati ottenuti nei due paragrafi precedenti alle deformazioni dei paraboloidi, e conseguire così il risultato finale enunciato nella prefazione.

Cominciando dal caso del paraboloide ellittico coi parametri p, q legati dalla relazione $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=1$, dobbiamo paragonare le forme del § 12 con quelle del § 15, in particolare le (45) colle (58), che esprimono le une e le altre

i valori delle costanti a, c, e debbono essere poste ora in accordo. Troviamo così le:

$$a = \operatorname{sen}^2 \sigma = -\frac{1}{q}, \quad b = \cos^2 \sigma = \frac{1}{p}; \tag{66}$$

e poichè p, q sono positivi si presenta qui la difficoltà che non può σ avere nelle nostre formole un valore reale. Ma appunto, ricorrendo ai noti risultati della composizione di trasformazioni *immaginarie* di Bäcklund in trasformazioni reali, la difficoltà si toglie e si ha il risultato finale in vista. Se osserviamo infatti le formole del teorema di permutabilità al § 8, vediamo subito che la deduzione analitica conserva la sua validità anche per valori complessi delle funzioni e delle costanti. Ora se supponiamo in quelle formole ω_1 reale e la costante σ_1 complessa, risulterà pure complessa la funzione θ_1 e potremo prendere per σ_2, θ_2 le quantità coniugate di σ_1, θ_1, scriviamo

$$\sigma_2 = \overline{\sigma}_1, \quad \theta_2 = \overline{\theta}_1.$$

Se poniamo poi, scindendo il reale dall'immaginario

$$\sigma_1 = \sigma + i\,\tau, \quad \theta_1 = \varphi + i\,\psi,$$

la formola finale (27*) del teorema di permutabilità (§ 8) ci dà

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) = \operatorname{tg}(i\,\tau)\coth(i\,\psi) = \operatorname{tgh}\tau\cot\psi, \tag{67}$$

e ci dimostra che la seconda soluzione ω_2 della (A) sarà reale, come la prima ω_1.

Ciò premesso, se nelle formole (66) diamo alla costante σ il valore puramente immaginario $\sigma = i\,\tau$, esse diventeranno

$$\cosh^2 \tau = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{senh}^2 \tau = \frac{1}{q}; \tag{66*}$$

e poichè p, q sono positivi ed è $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1$, avremo un valore reale della costante τ che vi soddisfa (insieme coll'opposto $-\tau$). Osserviamo poi che, nelle notazioni del § 15, la (67) si scrive

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right) = \operatorname{tgh}\tau\cot\psi. \tag{68}$$

Se dimostriamo che la funzione Φ definita, a meno di un fattore costante, dalle (61) può prendersi reale, reale risulterà pure W dalla (59) ed avremo così una coppia *reale* (Φ, W) di soluzioni speciali del sistema (42),

(42*), coi valori $a = -\frac{1}{q}$, $c = \frac{1}{p}$ delle costanti, come si voleva. L'ultima verifica indicata si compie facilmente sulle (61), ove si deve porre $\sigma = i\tau$, $\theta = \varphi + i\psi$, onde per la (68) risulta

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \Phi}{\partial u} &= \cos\omega \operatorname{senh}\tau\,[\cot\psi \operatorname{senh}(\varphi + i\psi) - i\cosh(\varphi + i\psi)] \\ \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} &= \operatorname{sen}\omega \operatorname{senh}\tau\,[\cot\psi \cosh(\varphi + i\psi) - i\operatorname{senh}(\varphi + i\psi)], \end{aligned}\right.$$

ossia

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} = \frac{\operatorname{senh}\tau \cos\omega \operatorname{senh}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}, \quad \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\tau \operatorname{sen}\omega \cosh\varphi}{\operatorname{sen}\psi}. \tag{69}$$

I valori dei secondi membri essendo reali, ne risulta che si può prendere Φ reale, ed è quindi reale anche

$$W = -\operatorname{tgh}\tau \cot\psi \,.\, \Phi. \tag{70}$$

Dimostrato così il nostro asserto, possiamo ancora osservare che le formole trovate si verificano per via reale nel modo seguente. Poniamo nelle formole (26) § 8 della trasformazione di Bäcklund

$$\sigma = i\tau, \quad \theta = \varphi + i\psi$$

e, separando il reale dall'immaginario, ne dedurremo le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \operatorname{senh}\varphi\,[\cosh\tau \cos\omega \cos\psi + \operatorname{senh}\tau \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\psi] \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \cosh\varphi\,[\cosh\tau \operatorname{sen}\omega \cos\psi - \operatorname{senh}\tau \cos\omega \operatorname{sen}\psi] \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \operatorname{senh}\varphi\,[\cosh\tau \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\psi + \operatorname{senh}\tau \cos\omega \cos\psi] \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \cosh\varphi\,[-\cosh\tau \cos\omega \operatorname{sen}\psi + \operatorname{senh}\tau \operatorname{sen}\omega \cos\psi]. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Le (a), (b), soddisfacendo ω alla (A) $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega$, costituiscono per le funzioni incognite φ, ψ un sistema illimitatamente integrabile di equazioni ai differenziali totali. Ed ora, servendoci di queste formole, si vede anzi tutto che la condizione d'integrabilità per la (69) è identicamente soddisfatta e si possono compiere, sotto forma reale, tutte le altre verifiche che

provano essere la nostra coppia (Φ, W) una soluzione speciale del sistema (42), (42*) coi valori

$$c = \cosh^2 \tau, \quad a = -\operatorname{senh}^2 \tau$$

delle costanti.

Venendo in fine alle deformazioni del paraboloide ellittico, ricordiamo dal § 14 che potremo determinare una tale deformata per mezzo delle sue equazioni intrinseche, appena si conoscano due coppie di soluzioni speciali

$$(\Phi_1, W_1), \quad (\Phi_2, W_2),$$

che non offrano il caso eccezionale menzionato alla fine del § 14, per le quali cioè la costante

$$\Omega = \nabla(\Phi_1, \Phi_2) + \operatorname{senh}^2 \tau\, \Phi_1 \Phi_2 + \cosh^2 \tau\, W_1 W_2 = \frac{1}{\cos^2 \omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} -$$

$$- \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \operatorname{senh}^2 \tau\, \Phi_1 \Phi_2 + \cosh^2 \tau\, W_1 W_2$$

sia diversa da zero. Ma se (Φ_1, W_1), (Φ_2, W_2) sono due tali coppie di soluzioni speciali, calcolate per quadrature nel modo superiormente descritto, e con (φ_1, φ_2), (φ_2, φ_2) si indicano i valori di φ, ψ che loro rispettivamente corrispondono, osservando le (69), (70), se ne trae subito

$$\Omega = \operatorname{senh}^2 \tau \,.\, \Phi_1 \Phi_2 \left[\frac{\cosh(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2} + 1 + \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2}\right],$$

ovvero

$$\Omega = \frac{\operatorname{senh}^2 \tau \,.\, \Phi_1 \Phi_2}{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2} \left[\cosh(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2)\right].$$

È ora evidente che la costante Ω non può annullarsi; dunque il caso eccezionale non può qui affatto presentarsi.

§ 18.

Deformazioni di 1.ª specie del paraboloide iperbolico.

Per compiere anche per le deformazioni (di 1.ª specie) del paraboloide iperbolico una ricerca analoga a quella sopra eseguita pel paraboloide ellittico, conviene che paragoniamo le formole dei due §§ 13, 16, in particolare le (51) colle (63).

Così abbiamo per le costanti a, c i valori

$$a = -\frac{1}{p} = \operatorname{senh}^2 \sigma, \quad c = \frac{1}{q} = \cosh^2 \sigma, \tag{71}$$

dove al solito i parametri p, q del paraboloide iperbolico si suppongono legati dalla relazione (24) § 7: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siccome p, q sono positivi, si presenta per le (71) la medesima difficoltà come sopra per le (66), e questa superiamo nel medesimo modo. Nelle formole del § 9 relative al teorema di permutabilità per l'equazione (C) prendiamo θ reale, σ_1 puramente immaginario, poniamo $\sigma_1 = i\tau$; risulterà θ_1 complessa $= \varphi + i\psi$, e potremo assumere per σ_2, θ_2 le coniugate di σ_1, θ_1, cioè $\sigma_2 = -i\tau$, $\theta_2 = \varphi - i\psi$. Con ciò la formola (29*) del teorema di permutabilità diventa

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}(i\tau) \coth(i\psi) = \operatorname{tg}\tau \cot\psi \tag{72}$$

e ci dimostra che, scegliendo convenientemente il valore iniziale di ψ in guisa che sia $|\operatorname{tg}\tau \cot\psi| < 1$, risulterà pure θ_3 reale. Ora le formole (71), ponendovi $\sigma = i\tau$ danno

$$a = -\operatorname{sen}^2\tau = -\frac{1}{p}, \quad c = \cos^2\tau = \frac{1}{q}; \tag{73}$$

e poichè p, q sono positivi ed è $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, risultano soddisfatte da un valore reale di τ.

Basterà ancora qui dimostrare che la funzione Φ, calcolabile con una quadratura dalle (65), può assumersi reale, dopo di che risulterà reale, per la (64) e la (72), anche

$$W = -\operatorname{tg}\tau \cot\psi \, . \, \Phi. \tag{74}$$

Ora le (65), ponendovi $\sigma = i\tau$ ed osservando la (72), danno le formole

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} = -\frac{\operatorname{sen}\tau \cosh\theta \operatorname{senh}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}, \quad \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\tau \operatorname{senh}\theta \cosh\varphi}{\operatorname{sen}\psi}, \tag{75}$$

i cui secondi membri sono reali. Così abbiamo constatato che la soluzione speciale (Φ, W) del sistema (48), (48*), ove $a = -\operatorname{sen}^2\tau$, $c = \cos^2\tau$, calcolata dalle (75), (74) è in effetto reale.

Da ultimo osserviamo che, affatto analogamente al caso precedente, se calcoliamo due qualunque tali coppie (Φ_1, W_1), (Φ_2, W_2) e diciamo $(\varphi_1, \psi)_1$,

(φ_2, ψ_2) i corrispondenti valori di φ, ψ, dalle (75) si trae subito

$$\nabla(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{\operatorname{sen}^2 \tau \,.\, \Phi_1 \Phi_2}{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2} \cosh(\varphi_1 - \varphi_2),$$

e quindi

$$\Omega = \nabla(\Phi_1, \Phi_2) - a \Phi_1 \Phi_2 + c W_1 W_2 =$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \tau \,.\, \Phi_1 \Phi_2}{\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2} [\cosh(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\psi_1 - \psi_2)].$$

Anche qui la costante Ω non è nulla ed il caso eccezionale non può presentarsi, onde la conoscenza delle due soluzioni speciali basta per dedurne, in termini finiti, una deformazione del paraboloide iperbolico.

§ 19.

Deformazioni delle superficie d'elemento lineare (25) § 7.

Colle ricerche degli ultimi due paragrafi abbiamo effettivamente conseguito il risultato annunciato nella prefazione, per quanto riguarda le deformazioni degli ordinarii paraboloidi. Ora vogliamo far seguire alcune ricerche complementari dalle quali si vedrà che i metodi stessi si estendono ad altre classi di superficie applicabili, come anche al problema di trovare i sistemi ∞^1 normali di circoli giacenti nei piani tangenti dei paraboloidi.

Al primo oggetto prenderemo a studiare le deformazioni delle superficie corrispondenti al caso *c*) del § 7 coll'elemento lineare (25)

$$d s^2 = (\alpha^2 + p)\, d \alpha^2 - 2 \alpha \beta\, d \alpha\, d \beta + (\beta^2 - q)\, d \beta^2, \tag{75}$$

dove p, q sono costanti positive. Si è visto che la ricerca di queste deformazioni dipende dall'integrazione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \operatorname{senh} \theta \cosh \theta \tag{G}$$

e dalla integrazione del sistema lineare (H) del § 7.

Se le costanti p, q sono eguali, ponendo

$$\beta = \rho \cosh \varphi, \quad \alpha = \rho \operatorname{senh} \varphi,$$

l'elemento lineare (25) prende la forma

$$d s^2 = (\rho^2 - p)\, d \rho^2 + p \rho^2 d \varphi^2,$$

che appartiene alla superficie complementare del paraboloide di rotazione (Vol. II, pag. 67). Di queste superficie conosciamo già in termini finiti tutte le deformate (ibid); supponiamo dunque $p \neq q$. Secondo che $p < q$ ovvero $p > q$, potremo moltiplicare il $d s^2$ per un fattore costante tale che ne risulti nel 1.° caso

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1 \tag{76}$$

e nel 2.° caso

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1. \tag{76*}$$

Trattiamo in questo e nel seguente paragrafo il 1.° caso, ove l'equazione (G) diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta, \tag{G'}$$

che abbiamo visto nel § 8 associarsi alla (A) $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega$, relativa al paraboloide ellittico.

Soddisfacendo θ alla (G'), ne viene individuata nello spazio di

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 - d z^2$$

una superficie S di *1.ª specie* colla curvatura costante $K = -1$, d'elemento lineare

$$d s^2 = \cosh^2 \theta\, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \theta\, d v^2, \tag{77}$$

della quale le linee u, v sono le linee di curvatura. E invero, i valori dei simboli di Christoffel per la forma differenziale (77) essendo

$$\left\{ \begin{array}{lll} \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \operatorname{tgh} \theta \dfrac{\partial \theta}{\partial u}, & \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \operatorname{tgh} \theta \dfrac{\partial \theta}{\partial v}, & \left\{ {22 \atop 1} \right\} = - \operatorname{tgh} \theta \dfrac{\partial \theta}{\partial u} \\ \left\{ {11 \atop 2} \right\} = - \coth \theta \dfrac{\partial \theta}{\partial v}, & \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \coth \theta \dfrac{\partial \theta}{\partial u}, & \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \coth \theta \dfrac{\partial \theta}{\partial v}, \end{array} \right.$$

si soddisfano le equazioni di Codazzi e di Gauss ponendo

$$D = D'' = - \operatorname{senh} \theta \cosh \theta, \quad D' = 0.$$

Se costruiamo allora, secondo il § 11, il relativo sistema illimitatamente

integrabile (K), (K^*), troviamo le formole seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+a\cosh\theta\,.\,\Phi-c\operatorname{senh}\theta\,.\,W\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=-\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+a\operatorname{senh}\theta\,.\,\Phi-c\cosh\theta\,.\,W
\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial u},\qquad\frac{\partial W}{\partial v}=\coth\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v},\qquad(78^*)$$

e la relazione (38^*) § 11 fra le costanti a, c, essendo qui $K=-1$, diventa

$$a-c=1.\qquad(79)$$

Ora noi identifichiamo il sistema superiore (78), (78^*) col sistema (H) del § 7 colle posizioni

$$\alpha=\Phi,\quad\beta=W,\quad\lambda=\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad\mu=\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\qquad(80)$$

$$a=-\frac{1}{p},\quad c=-\frac{1}{q};\qquad(80^*)$$

onde la relazione (79) fra a, c si accorda colla (76) supposta fra p, q.

Medesimamente l'integrale quadratico (K') § 11

$$\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2-a\,\Phi^2+c\,W^2=\text{cost.}\qquad(81)$$

combina colla (H^*) § 7 quando si renda $=-1$ la costante del secondo membro nella (81).

Dopo di ciò le considerazioni stesse del § 14 dimostrano che la ricerca delle superficie d'elemento lineare (25), sotto la condizione (76)

$$\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=1,$$

si riduce alla ricerca delle soluzioni speciali del sistema (78), (78^*). E queste nuovamente troviamo con quadrature, applicando il teorema di permutabilità al § 8.

§ 20.

Ricerca delle soluzioni speciali del sistema (78), (78*).

Consideriamo, come al § 15, le due coppie di soluzioni (ω, ω_1), (θ, θ_1) delle equazioni (A), (G′) rispettivamente, le quali siano legate fra loro da due trasformazioni opposte B_σ, $B_{-\sigma}$. Dimostreremo che dando alle costanti a, c nel sistema (78), (78*) i valori

$$a = \operatorname{sen}^2 \sigma, \quad c = -\cos^2 \sigma, \tag{81*}$$

si può trovarne, con una quadratura, una coppia (Φ, W) di soluzioni speciali tali che si abbia

$$W = \Phi \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right). \tag{82}$$

Per ciò dalle relazioni (§ 8), che legano ω a θ, θ_1:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \cos\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\theta - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\theta \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \operatorname{sen}\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\theta + \cos\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\theta \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \theta_1}{\partial v} &= \cos\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\theta_1 \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\theta_1 + \cos\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\theta_1 \end{aligned}\right.$$

deduciamo per sottrazione

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\theta - \theta_1)}{\partial u} &= 2 \operatorname{senh}\left(\frac{\theta + \theta_1}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\sigma \cos\omega \cosh\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \cos\sigma \operatorname{sen}\omega \operatorname{senh}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)\right] \\ \frac{\partial(\theta - \theta_1)}{\partial v} &= 2 \cosh\left(\frac{\theta + \theta_1}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\omega \cosh\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \cos\sigma \cos\omega \operatorname{senh}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Derivando ora la (82) rapporto ad u, v, tenendo conto delle precedenti e confrontando colle (78*) ne deduciamo i valori di $\frac{\partial \log \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \log \Phi}{\partial v}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \Phi}{\partial u} &= \cosh \theta \left[\operatorname{sen} \sigma \cos \omega + \cos \sigma \operatorname{sen} \omega \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)\right] \\ \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} &= \operatorname{senh} \theta \left[\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \omega - \cos \sigma \cos \omega \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right)\right]; \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

per queste la condizione d'integrabilità trovasi identicamente soddisfatta, e si ha Φ con una quadratura, indi W dalla (82). Scritte ora con le (84) sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \operatorname{sen} \sigma \cos \omega \, \Phi + \cos \sigma \operatorname{sen} \omega \, W \\ \frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \omega \, \Phi - \cos \sigma \cos \omega \, W, \end{aligned}\right.$$

facilmente verifichiamo che le funzioni Φ, W così determinate costituiscono appunto una coppia di soluzioni speciali del sistema (78), (78*), avendo a, c i valori (81*). Se però confrontiamo questi valori con quelli dati dalle (80*), ne deduciamo

$$\operatorname{sen}^2 \sigma = -\frac{1}{p}, \quad \cos^2 \sigma = \frac{1}{q},$$

e per soddisfarle dovremo dare a σ un valore puramente immaginario $\sigma = i\tau$.

Così mentre θ, θ_1 saranno reali, avremo ω complesso

$$\omega = \varphi + i \varphi$$

ed $\omega_1 = \bar{\omega} = \varphi - i\psi$. Così la formola (27*) del teorema di permutabilità (§ 8) diventa

$$\operatorname{tg}(i\psi) = -\operatorname{tg}(i\tau) \coth\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right),$$

ossia

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) = -\operatorname{tgh} \tau \coth \psi.$$

Sostituendo nelle (84), troviamo per $\frac{\partial \log \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \log \Phi}{\partial v}$ i valori reali

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} = -\frac{\operatorname{senh} \tau \cosh \theta \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{senh} \psi}, \quad \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} = -\frac{\operatorname{senh} \tau \operatorname{senh} \theta \cos \varphi}{\operatorname{senh} \psi}; \quad (84^*)$$

così avremo con una quadratura una coppia reale (Φ, W) di soluzioni speciali del sistema (78), (78*), ove si faccia

$$a = -\operatorname{senh}^2 \tau = -\frac{1}{p}, \quad c = -\cosh^2 \tau = -\frac{1}{q},$$

in armonia colla relazione $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1$. Valgono quindi le medesime conclusioni come ai §§ 17, 18; ed anche qui si vedrebbe, nel medesimo modo, che il caso eccezionale (§ 14) non può presentarsi.

§ 21.

Esame del caso $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1$.

Passando ora a trattare il caso in cui fra i parametri p, q delle superficie d'elemento lineare (25) ha luogo la relazione superiore (76*) § 19, vediamo in primo luogo che l'equazione (G) diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\operatorname{senh} \theta \cosh \theta \tag{G''}$$

e coincide con quella da cui dipende la ricerca delle superficie dello spazio ordinario applicabili sulla sfera. Dimostreremo ulteriormente che la determinazione delle superficie d'elemento lineare (25) si ottiene con quadrature dalle formole per le trasformazioni delle superficie applicabili sulla sfera.

Soddisfacendo θ alla (G''), l'elemento lineare

$$d s^2 = \cosh^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, d v^2$$

appartiene ad una superficie S, di curvatura costante $K = +1$, dello spazio ordinario, sulla quale le linee u, v sono le linee di curvatura ed i raggi principali di curvatura hanno i valori

$$r_1 = \operatorname{tgh} \theta, \quad r_2 = \coth \theta.$$

Ne segue $D = D'' = -\operatorname{senh} \theta \cosh \theta$, $D' = 0$ ed il sistema illimitatamente integrabile (K), (K^*) § 11 per la superficie S coincide formalmente

col sistema (78), (78*) § 19; però attualmente la relazione fra le costanti a, c, invece che dalla (79) è data da

$$c - a = 1. \tag{79*}$$

Identifichiamo ora il sistema (78), (78*) nel presente caso col sistema (H) § 7 ancora colle posizioni (80), (80*), le quali ultime

$$a = -\frac{1}{p}, \quad c = -\frac{1}{q}$$

trovansi d'accordo colla relazione superiore (79*) fra a, c e colla

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1.$$

Per completare anche in questo caso la ricerca altro non resta che mostrare come si calcolino ora le soluzioni speciali del sistema (78), (78*), servendosi del teorema di permutabilità, relativo alla equazione (G″). Questo è già esposto in sostanza al § 404 delle *Lezioni* nel paragone colle formole di inversione dei teoremi di Guichard. Qui non facciamo che richiamare rapidamente quelle formole, scrivendole nelle notazioni attuali.

Essendo θ una soluzione della (G″), partiamo dalle formole del § 401 delle *Lezioni*, relative alla composizione di due trasformazioni immaginarie di Bäcklund, e poniamovi $\sigma_1 = \sigma + \frac{i\pi}{2}$ (σ reale). Così, secondo le formole (46) del § 401 (Vol. II, pag. 460), conosceremo due funzioni ω, φ di u, v che soddisferanno al sistema di equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\varphi\,[\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma\cosh\theta\cosh\omega] \\
\frac{\partial \omega}{\partial v} &= -\cos\varphi\,[\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega]
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \cos\varphi\,[\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\omega + \cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\omega] \\
-\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \operatorname{sen}\varphi\,[\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cosh\omega + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\omega].
\end{aligned}\right\} \tag{85*}$$

Ciò posto, dimostriamo che se nel sistema (78), (78*) diamo alle costanti a, c i valori

$$a = -\cosh^2\sigma, \quad c = -\operatorname{senh}^2\sigma,$$

cioè poniamo per le (80*)

$$\cosh^2 \sigma = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{senh}^2 \sigma = \frac{1}{q}.$$

in armonia colla relazione $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1$, potremo trovare con una quadratura una coppia (Φ, W) di soluzioni speciali del detto sistema, tali che sia

$$W = -\coth \sigma \coth \omega \,.\, \Phi. \tag{86}$$

Se si deriva questa rapporto ad u, v, osservando le (78*) e le (85), se ne traggono i valori:

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} = -\frac{\cosh \sigma \operatorname{sen} \varphi \cosh \theta}{\operatorname{senh} \omega}, \quad \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} = -\frac{\cosh \sigma \cos \varphi \operatorname{senh} \theta}{\operatorname{senh} \omega}. \tag{87}$$

La condizione d'integrabilità trovasi qui identicamente soddisfatta, a causa delle (85), (86*), e si ha per ciò Φ con una quadratura, indi W dalla (86).

Scrivendo poi le (87) sotto la forma

$$\frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\cosh \sigma \operatorname{sen} \varphi \, \Phi}{\operatorname{senh} \omega}, \quad \frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{\cosh \sigma \cos \varphi}{\operatorname{senh} \omega} \cdot \Phi,$$

facilmente si vede che anche le (78) (con $a = -\cosh^2 \sigma$, $b = -\operatorname{senh}^2 \sigma$) sono soddisfatte. In fine la formola

$$\left(\frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = \frac{\cosh^2 \sigma \, \Phi^2}{\operatorname{senh}^2 \omega} = a \, \Phi^2 - c \, W^2$$

dimostra che (Φ, W) è una coppia di soluzioni speciali, c. d. d.

§ 22.

I sistemi ciclici nei piani tangenti delle superficie d'elemento lineare (1).

Ci volgiamo ora alle ultime ricerche della presente Memoria colla trattazione del problema seguente: *Determinare i sistemi ciclici (sistemi ∞^2 normali di circoli), i cui circoli giacciono individualmente nei piani tangenti di un paraboloide ellittico od iperbolico, e più in generale di una superficie il cui elemento lineare sia dato dalla formola* (1).

Se non si distingue il reale dall'immaginario, il problema enunciato è da riguardarsi, pel noto teorema di DARBOUX (Vol. II, pag. 146), come identico a quello già trattato della deformazione. In realtà però il problema attuale equivale (Vol. II, pag. 143) alla ricerca delle superficie d'assegnato elemento lineare appartenenti allo spazio col $d s^2$ indefinito

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 - d z^2.$$

Se facciamo questa ricerca per le superficie d'elemento lineare (1):

$$\left.\begin{aligned} d s^2 = (a_{11} \alpha^2 + 2 a_{12} \alpha + a_{22}) \, d \alpha^2 \pm \\ \pm 2 (a_{11} \alpha \beta + a_{13} \alpha + a_{12} \beta + a_{23}) \, d \alpha \, d \beta + \\ + (a_{11} \beta^2 + 2 a_{13} \beta + a_{33}) \, d \beta^2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

sempre supponendo che la forma differenziale quadratica del 2.° membro sia definita positiva, quindi $H > 0$, basterà ricordare quanto si è detto in generale al § 10 sulle superficie di 1.ª specie per concluderne che l'analisi esposta nei §§ 1-6 conserva ancor qui il suo valore. L'unica modificazione da introdurvi dipende dalla cangiata forma dell'equazione di GAUSS, che diventa qui la (36)

$$\frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} = - K.$$

Per ciò la formola (6*) del § 1 diventa ora $c = \sqrt{-A}$, onde segue che nelle discussioni dei seguenti paragrafi debbono essere permutati fra loro i due casi di $A > 0$, $A < 0$, vale a dire di c reale o puramente immaginario.

Esporremo qui i risultati della ricerca pei due casi più interessanti del paraboloide ellittico ed iperbolico, a cui aggiungeremo quello delle superficie le cui deformazioni abbiamo studiato nei §§ 19-21.

§ 23.

Sistemi ciclici i cui piani inviluppano un paraboloide ellittico.

Il caso del paraboloide ellittico rientra nel 1.° caso trattato al § 3, con $A > 0$; soltanto le formole (7) per Δ, Δ'' si modificano nelle altre

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2\right] \\ \Delta'' &= \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2\right], \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

mentre le (10) conservano la loro forma

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Delta}^2 &= \Delta^2 + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2\right] \\ \overline{\Delta}''^2 &= \Delta''^2 + \varepsilon'\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Ma essendo ora Δ^2, Δ''^2 reali negativi, bisogna evidentemente prendere

$$\varepsilon = +1, \quad \varepsilon' = +1,$$

e ponendo ancora

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2 = \lambda^2, \qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 = \mu^2,$$

le formole (88), (89) dànno

$$\overline{\Delta}^2 = \lambda^2\left[1 - \frac{A}{H}\lambda^2\right], \quad \overline{\Delta}''^2 = \mu^2\left[1 - \frac{A}{H}\mu^2\right],$$

e la relazione

$$\overline{\Delta}^2\,\overline{\Delta}''^2 = \Delta^2\,\Delta''^2 = \frac{A^2}{H^2}\lambda^4\mu^4$$

diventa

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{H}{A}. \quad (90)$$

Dopo ciò il calcolo procede precisamente come al § 4 e conduce al si-

stema completo seguente:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{H_1}{2A} \operatorname{sen} \omega + \frac{H_2}{2A} \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu, \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{H_1}{2A} \cos \omega + \frac{H_2}{2A} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial u} \lambda,
\end{aligned}\right.$$

colla condizione d'integrabilità per ω

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{A_{33} - A_{22}}{A} \operatorname{sen} \omega \cos \omega + \frac{A_{23}}{A} \cos \omega.$$

Nel caso del paraboloide ellittico essendo

$$d s^2 = (\alpha^2 + p) d \alpha^2 + 2 \alpha \beta \, d \alpha \, d \beta + (\beta^2 + q) d \beta^2,$$

il sistema completo diventa:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\lambda \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \cos \omega, \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\alpha}{p} \operatorname{sen} \omega + \frac{\beta}{q} \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial v} \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \cos \omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \mu, \\
&\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\alpha}{p} \cos \omega + \frac{\beta}{q} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial u} \lambda
\end{aligned}\right\} \quad (\overline{\mathrm{B}})$$

e la relazione (90) dà

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1. \qquad (\overline{\mathrm{B}}^*)$$

Quanto alla equazione a derivate parziali per ω_0, essa diventa

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \operatorname{sen} \omega \cos \omega$$

e, supponendo qui come è lecito

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1, \qquad (91)$$

essa coincide coll'equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega, \tag{$\bar{A}$}$$

da cui dipende la ricerca delle superficie pseudosferiche dell'ordinario spazio euclideo.

Ma possiamo ora vedere di più che il sistema $(\bar{B})$ si identifica col sistema illimitatamente integrabile (K), (K*) del § 11 per l'ordinaria superficie pseudosferica d'elemento lineare

$$d s^2 = \cos^2 \omega \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \omega \, d v^2,$$

riferita alle linee di curvatura u, v coi raggi principali di curvatura

$$r_1 = + \operatorname{tg} \omega, \quad r_2 = - \cot \omega,$$

da cui

$$D = \operatorname{sen} \omega \cos \omega, \quad D'' = - \operatorname{sen} \omega \cos \omega, \quad D' = 0.$$

Il sistema (K), (K*) si può scrivere allora sotto la forma data nella mia Memoria *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* al § 23*:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\cos \omega}{a^2} \cdot \Phi + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \operatorname{sen} \omega \, . \, W \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = - \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = - \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\operatorname{sen} \omega}{a^2} \cdot \Phi - \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \cos \omega \, . \, W
\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = - \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \cot \omega \, . \, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \tag{92*}$$

dove a indica una costante. Se ora poniamo

$$\alpha = W, \quad \beta = \Phi, \quad \lambda = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \mu = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \tag{93}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} - 1 \tag{93*}$$

(*) Vedi questi *Annali*, Serie 3.ª, Tomo III.

il sistema $(\bar{A})$ viene appunto ad identificarsi col precedente (92), (92*); e di più le posizioni (93*) sono in accordo colla relazione supposta (91). Poichè inoltre nel caso nostro la costante a^2 ha un valore < 1, le formole superiori corrispondono precisamente (m. c. § 27) alla composizione di due trasformazioni reali ed opposte di Bäcklund. Ne concludiamo adunque: *La determinazione dei sistemi ciclici i cui piani inviluppano un paraboloide ellittico dipende dalla composizione di due trasformazioni reali ed opposte di* Bäcklund *per le ordinarie superficie pseudosferiche e da successive quadrature.*

§ 24.

Sistemi ciclici i cui piani inviluppano un paraboloide iperbolico.

Il caso del paraboloide iperbolico, che vogliamo ora considerare, rientra nel 1.° caso del § 5 con $A > 0$. Soltanto le formole (15) si modificano nelle altre

$$\left\{\begin{aligned} \Delta &= \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2\right] \\ \Delta'' &= \frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2\right], \end{aligned}\right.$$

rimanendo la relazione (14)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v}.$$

Come al § 5, possiamo supporre positivi i binomii

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2,$$

e ponendoli eguali rispettivamente a λ^2, μ^2, avremo

$$\Delta^2 = -\frac{A}{H}\lambda^4, \quad \Delta''^2 = -\frac{A}{H}\mu^4.$$

Le successive formole (16) ibid. dànno quindi

$$\bar{\Delta}^2 = \lambda^2\left[\varepsilon - \frac{A}{H}\lambda^2\right], \quad \bar{\Delta}''^2 = -\mu^2\left[\varepsilon' + \frac{A}{H}\mu^2\right]$$

e dimostrano che si deve qui assumere

$$\varepsilon = +1, \quad \varepsilon' = -1,$$

indi

$$\overline{\Delta}^2 = \lambda^2 \left[1 - \frac{A}{H}\lambda^2\right], \quad \overline{\Delta}''^2 = \mu^2 \left[1 - \frac{A}{H}\mu^2\right].$$

Dopo ciò l'equazione di Gauss

$$\overline{\Delta}^2 \, \overline{\Delta}''^2 = \Delta^2 \, \Delta''^2$$

ci dà

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{H}{A}.$$

Procedendo ora come al § 5 (nel 2.° caso), ne deduciamo per le funzioni incognite α, β, λ, μ il sistema completo:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh} \theta, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{H_1}{2A} \cosh \theta + \frac{H_2}{2A} \operatorname{senh} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh \theta, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{H_1}{2A} \operatorname{senh} \theta + \frac{H_2}{2A} \cosh \theta - \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda \end{aligned}\right.$$

colla condizione d'integrabilità per θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \frac{A_{22} + A_{33}}{A} \operatorname{senh} \theta \cosh \theta + \frac{A_{23}}{A} \cosh 2\theta.$$

In particolare pel paraboloide iperbolico essendo

$$d s^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2$$
$$H = p\beta^2 + q\alpha^2 + pq, \quad A = pq,$$

il sistema completo diventa:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh} \theta, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\alpha}{p} \cosh \theta + \frac{\beta}{q} \operatorname{senh} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu \cosh \theta, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\alpha}{p} \operatorname{senh} \theta + \frac{\beta}{q} \cosh \theta - \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda; \end{aligned}\right\} \quad (\overline{D})$$

e supponendo, come al solito, i parametri p, q del paraboloide iperbolico legati dalla relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

l'equazione a derivate parziali per θ diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \text{senh}\, \theta \cosh \theta,$$

assumendo la forma stessa del problema al § 19. La relazione quadratica fra α, β, λ, μ si scrive poi

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1. \tag{$\overline{\text{D}}^*$}$$

Ed ora basta porre

$$\alpha = \Phi, \quad \beta = W, \quad \lambda = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \mu = \frac{1}{\text{senh}\, \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \tag{94}$$

$$a = \frac{1}{p}, \quad c = -\frac{1}{q} \tag{94*}$$

per identificare il sistema $(\overline{\text{D}})$ col sistema (78), (78*) § 19, la relazione (79) fra le costanti a, c combinando colla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se poniamo successivamente

$$a = \frac{1}{p} = \text{sen}^2 \sigma, \quad c = -\frac{1}{q} = -\cos^2 \sigma,$$

ciò che dà per σ un valore reale, basterà applicare i risultati del § 20 per concluderne: *La ricerca dei sistemi ciclici i cui piani inviluppano un paraboloide iperbolico dipende dalle formole di composizione di due trasformazioni reali ed opposte di* Bäcklund *per le superficie di 1.ª specie, e di curvatura* $K = +1$, *dello spazio di* $d s^2 = d x^2 + d y^2 - d z^2$, *e da successive quadrature.*

. . . .

§ 25.

Sistemi ciclici nei piani tangenti della superficie d'elemento lineare (25)

$$d s^2 = (\alpha^2 + p) d\alpha^2 - 2\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - q) d\beta^2.$$

Da ultimo ricerchiamo i sistemi ciclici i cui circoli giacciono nei piani tangenti delle superficie sopra indicate.

Qui ci troviamo nel caso del § 5 con $A < 0$. Procedendo come al paragrafo precedente, troviamo il sistema completo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \lambda \cosh\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda \,\mathrm{senh}\,\theta, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \\ &= \frac{\alpha}{p}\cosh\theta - \frac{\beta}{q}\,\mathrm{senh}\,\theta + \frac{\partial \theta}{\partial v}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \mu\,\mathrm{senh}\,\theta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \mu\cosh\theta, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\alpha}{p}\,\mathrm{senh}\,\theta + \frac{\beta}{q}\cosh\theta + \frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (\overline{\mathrm{H}})$$

colla condizione d'integrabilità per θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta\,;$$

e la relazione quadratica fra α, β, λ, μ diventa

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\beta^2}{q} - \frac{\alpha^2}{p} - 1. \qquad (\overline{\mathrm{H}}^*)$$

Potremo supporre, come al § 19:

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \pm 1;$$

ma nel caso attuale non vi è differenza essenziale nella scelta del segno su-

periore o dell'inferiore (*). Supposto $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1$, l'equazione per θ diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta,$$

che è la (C) del § 13 da cui abbiamo visto dipendere le superficie di seconda specie a curvatura $K = +1$. Ed appunto possiamo ora identificare il sistema $(\bar{\mathrm{H}})$ col sistema (48), (48*) del § 13 ponendo

$$\alpha = \Phi, \quad \beta = W, \quad \lambda = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \; \mu = \frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \tag{95}$$

$$a = \frac{1}{p}, \quad c = \frac{1}{q}. \tag{95*}$$

Se applichiamo ora i risultati della prima parte del § 16, concernenti la ricerca delle soluzioni speciali del sistema (48), (48*), e poniamo

$$a = \frac{1}{p} = \operatorname{senh}^2 \sigma, \quad c = \frac{1}{q} = \cosh^2 \sigma,$$

ciò che dà un valore reale per σ, essendo p, q positivi e $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1$, abbiamo il risultato finale:

La determinazione dei sistemi ciclici giacenti nei punti tangenti delle superficie d'elemento lineare (25) *dipende dalla composizione di due trasformazioni reali ed opposte di* Bäcklund *per le superficie di seconda specie, colla curvatura* $K = +1$, *dello spazio di* $d s^2 = d x^2 + d y^2 - d z^2$ *e da successive quadrature.*

Viareggio, Settembre 1903.

(*) Se $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = -1$, si scambii u con v nell'equazione per θ e nel sistema $(\bar{H})$, indi si ponga

$$\alpha = W, \quad \beta = \Phi, \quad \lambda = \frac{1}{\operatorname{senh} \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \mu = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

$$a = \frac{1}{q}, \quad c = \frac{1}{p}$$

e si avranno i risultati stessi del testo.

Sulla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni.

(*Di* Luigi Brusotti, *a Pavia.*)

Nel presente lavoro mi propongo di applicare la teoria delle forme binarie allo studio della curva C razionale normale di uno spazio S_4 lineare a quattro dimensioni.

Interpretati i coefficienti di una forma binaria biquadratica f come coordinate projettive di un punto di S_4, pongo dapprima in relazione le principali varietà annesse a C colle forme invariantive di f (§ 1) e, stabilita l'equazione di una quadrica generica di S_4, studio specialmente i coni quadrici formati coi piani trisecanti C (§ 2). Introdotti (§ 3) i combinanti di due forme biquadratiche, considero alcuni sistemi di rette annessi alla curva e specialmente quello ∞^3 delle trisecanti la superficie doppia della varietà dei piani osculatori (che dico *rette sizigetiche*) ed il complesso lineare $(U\vartheta)^6 = 0$ annesso ad ogni sestica binaria U, estensione dell'analogo, annesso ad ogni biquadratica e relativo alla cubica gobba, studiato da Sturm. Il sistema ∞^2 delle rette sizigetiche appartenenti al complesso $(U\vartheta)^6 = 0$ dà luogo (§ 4) ad una varietà cubica con dieci punti doppi (di Segre e di Castelnuovo), la quale fornisce una notevole interpretazione geometrica di uno studio algebrico dello Stephanos. Fra gli altri argomenti trattati noto l'interpretazione geometrica del sistema invariantivo di T (covariante sestico di f) (§ 5) e lo studio di un fascio di complessi quadratici annesso a C (§ 6). Chiudo infine il lavoro con un breve cenno sulle varietà di piani e di iperpiani (§ 7).

§ 1. La curva C e le principali varietà annesse.

1. Data la forma biquadratica:

$$f = \bar{a}_0 x_1^4 + 4 \bar{a}_1 x_1^3 x_2 + 6 \bar{a}_2 x_1^2 x_2^2 + 4 \bar{a}_3 x_1 x_2^3 + \bar{a}_4 x_2^4 = a_x^4 = a'^4_x = \cdots$$

ne interpreto i coefficienti $\bar{a}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) come coordinate projettive omogenee di un punto (a) nello spazio lineare S_4 a quattro dimensioni. L'annullarsi di un invariante di f:

$$I = 0$$

rappresenta una *forma* (ipersuperficie) di S_4, di ordine uguale al grado di I. Indicando con δ l'operazione di Aronhold:

$$\delta = \sum_0^4 \bar{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial \bar{a}_i}$$

l'equazione:

$$\delta^\nu I = 0$$

rappresenta la *forma* polare ν-esima del punto (α), rispetto alla $I = 0$. L'annullarsi identico di un covariante di f:

$$\Phi(x_1 x_2) \equiv 0$$

rappresenta la varietà completa intersezione delle *forme* rappresentate dall'annullarsi dei singoli coefficienti di $\Phi(x_1 x_2)$.

Nel seguito farò uso delle notazioni:

$$H = H_x^4 = H'^4_x = \cdots = (a\, a')^2 a_x^2 a'^2_x; \quad i = (a\, a')^4;$$

$$T = T_x^6 = T'^6_x = \cdots = (a\, H)\, a_x^3 H_x^3; \quad j = (a\, H)^4.$$

2. L'annullarsi identico dell'Hessiano:

$$H_x^4 \equiv 0$$

rappresenta una *curva razionale normale* (del 4.° ordine) C di S_4. È noto infatti che $H \equiv 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè f sia la quarta potenza di una forma lineare $\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, onde per un punto di $H \equiv 0$ sarà:

$$\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \bar{a}_2 : \bar{a}_3 : \bar{a}_4 = \xi_1^4 : \xi_1^3 \xi_2 : \xi_1^2 \xi_2^2 : \xi_1 \xi_2^3 : \xi_2^4$$

La curva C viene così anche definita come completa intersezione delle quadriche del sistema lineare ∞^4:

$$(\alpha H)^4 = 0$$

essendo α_x^4 una forma parametrica. I punti di C corrispondono biunivocamente ai valori del parametro $\xi_1 : \xi_2$; nel seguito però posto: $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, assumo $x_1 : x_2$ come parametro di un punto (x) di C (*).

La condizione perchè 5 punti (a) (b) (c) (d) (e) siano in un iperpiano S_3 è data da:

$$(a\,b)\ (a\,c)\ (a\,d)\ (a\,e)\ (b\,c)\ (b\,d)\ (b\,e)\ (c\,d)\ (c\,e)\,(d\,e) = 0.$$

In particolare:

$$a_x\,a_y\,a_z\,a_t = 0$$

è l'equazione [(a) variabile] dell'S_3 che sega C nei punti (x), (y), (z), (t). Così:

$$a_x^2\,a_y\,a_z = 0$$
$$a_x^2\,a_y^2 = 0$$
$$a_x^3\,a_y = 0$$
$$a_x^4 = 0$$

sono rispettivamente l'equazione dell'S_3 tangente a C in (x) e passante per (y) (z), l'equazione dell'S_3 bitangente in (x) (y), l'equazione dell'S_3 osculatore in (x) e passante per (y), l'equazione infine dell'S_3 iperosculatore in (x). Inoltre l'annullarsi identico di $a_x\,a_y\,a_z\,a_t$ (rispetto a (t)):

$$a_x\,a_y\,a_z\,a_t \equiv 0$$

rappresenta l'S_2 trisecante C in (x) (y) (z); in particolare

$$a_x^2\,a_y\,a_t \equiv 0, \quad a_x^3\,a_t \equiv 0$$

rappresentano rispettivamente l'S_2 tangente a C in (x) e secante in (y), e l'S_2 osculatore in (x). Analogamente l'annullarsi identico (rispetto a (t)) di $a_x\,a_y\,a_t^2$:

$$a_x\,a_y\,a_t^2 \equiv 0$$

(*) Per l'opportunità di questa scelta cfr. PITTARELLI, *La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche.* Giorn. di Mat. XVII (1879) § II.

rappresenta la corda (x) (y), ed in particolare

$$a_x^2 a_t^2 \equiv 0$$

la tangente in (x).

La $a_x^4 = 0$, tenuto fisso (a), rappresenta su C quattro punti (x), e, per quanto precede:

I punti (x) *di* C *radici di* f, *sono quelli di contatto dei quattro* S_3 *iperosculatori passanti per* (a).

3. Da note proprietà della forma biquadratica (*) si deduce:

I) *La quadrica*

$$i = 0$$

è il luogo dei punti da cui si conducono quaterne equianarmoniche di S_3 *iperosculatori a* C (**).

Per un'osservazione generale [V. 1.] l'iperpiano polare di (α) rispetto alla $i = 0$ è di equazione

$$(\alpha\, a)^4 = 0.$$

Ne segue: *L'iperpiano polare di* (α), *rispetto alla quadrica* $i = 0$, *contiene i punti di contatto dei quattro* S_3 *iperosculatori condotti a* C *da* (α). In particolare: *L'*S_3 *polare di un punto di* C, *è quello ivi iperosculatore alla curva.* Se ne deduce che la curva normale ed il sistema de'suoi S_3 iperosculatori, come del resto è noto, sono duali in S_4; in seguito però si ommette di enunciare per ogni teorema il correlativo. Si noti intanto che: *La quadrica* $i = 0$ *è inviluppo degli iperpiani secanti* C *in quaterne equianarmoniche di punti.*

II) *La forma cubica*

$$j = 0$$

è il luogo dei punti da cui si conducono a C *quaterne armoniche di* S_3 *iperosculatori.*

Altro significato geometrico della $j = 0$ si ha nel seguente modo:

(*) V. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen.* Leipzig, 1872. § 50.

(**) Per questo teorema e per qualcuno dei seguenti cfr. anche Aschieri, *Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni.* Mem. Acc. Lincei, Serie 4.ª, Vol. IV.

Dalle tre equazioni di una corda (x) (y) di C:

$$\begin{cases} a_x \quad a_y \quad a_1^2 = 0 \\ a'_x \quad a'_y \quad a'_1\, a'_2 = 0 \\ a''_x \quad a''_y \quad a''^2_2 = 0 \end{cases}$$

si eliminino (x) (y). Si avrà:

$$a_1^2\, a'_1\, a'_2\, a''^2_2 \begin{vmatrix} a_1^2, & a_1 & a_2, & a_2^2 \\ a'^2_1, & a'_1 & a'_2, & a'_2 \\ a''^2_1, & a''_1 & a''_2, & a''^2_2 \end{vmatrix} = a_1^2\, a'_1\, a'_2\, a''^2_2 (a\, a')\,(a'\, a'')\,(a''\, a) = 0$$

e collo scambio dei tre simboli (soppresso un fattor numerico):

$$(a\, a')^2\, (a'\, a'')^2\, (a''\, a)^2 = j = 0$$

Dunque: *La $j = 0$ è la varietà delle corde di C.*

Da un'osservazione generale già applicata risulta che la quadrica polare di un punto (α) rispetto a $j = 0$ è di equazione

$$(a\, a')^2\, (\alpha\, a)^2\, (\alpha\, a')^2 = 0$$

brevemente:

$$(\alpha\, H)^4 = 0,$$

il che fornisce il significato geometrico del sistema ∞^4 di quadriche già sopra indicato [V. 2.]. Posto per brevità

$$h = h_x^4 = (\alpha\, \alpha')^2\, \alpha_x^2\, \alpha'^2_x,$$

sarà:

$$(h\, a)^4 = 0$$

l'equazione dell'iperpiano polare di (α) rispetto a $j = 0$. Ossia:

L'iperpiano polare di un punto (α) rispetto alla varietà delle corde coincide coll'iperpiano polare del relativo punto hessiano (h) rispetto alla quadrica $i = 0$. Di qui si può dedurre una costruzione di (h) dato (α).

III). *Il luogo dei punti da cui si conducono a C quaterne di S_2 iperosculatori aventi birapporto dato è la forma del 6.° ordine:*

$$i^3 - k\, j^2 = 0 \tag{1}$$

essendo k il corrispondente invariante assoluto. Al fascio (1) appartengono le *forme* $i = 0$, $j = 0$ già studiate, da contarsi rispettivamente tre volte e due volte. La base del fascio è dunque (contata sei volte) la superficie del sesto ordine $i = 0$, $j = 0$, che si incontrerà fra breve.

4. È noto (*) che le condizioni perchè f abbia una radice doppia, oppure una radice tripla, oppure due radici doppie sono date rispettivamente da:

$$\text{A)} \qquad i^3 - 6j^2 = 0$$

$$\text{B)} \qquad i = 0, \quad j = 0$$

$$\text{C)} \qquad T_x^6 \equiv 0 \quad \text{(ident.)}.$$

Tenuta presente l' osservazione in fine del n.° 2 e per mezzo di semplici considerazioni geometriche, si ha:

I) *Il luogo degli S_2 osculatori a C è la forma del 6.° ordine*

$$i^3 - 6j^2 = 0$$

del fascio (1).

II) *Il luogo delle tangenti a C, varietà di regresso per la forma dei piani osculatori, è la superficie del 6.° ordine*

$$i = 0 \quad j = 0$$

base del fascio (1).

III) *Il luogo dei punti per cui passano due S_2 osculatori a C (varietà doppia della forma degli S_2 osculatori) è rappresentato da*

$$T_x^6 \equiv 0.$$

Un piano generico di S_4 sega $i^3 - 6j^2 = 0$ in una curva γ del 6.° ordine, razionale perchè riferita biunivocamente a C, e la varietà delle tangenti in sei punti che sono cuspidi di γ. La curva γ possiede quindi inoltre 4 punti doppi (della $T_x^6 \equiv 0$), ossia:

La $T_x^6 \equiv 0$ *è del quarto ordine.* Essa può considerarsi come completa intersezione delle *forme* del 3.° ordine $(U\,T)^6 = 0$, essendo U_x^6 una forma parametrica. Sulla varietà $T_x^6 \equiv 0$ tornerò in seguito: per ora mi limito a dedurne un significato geometrico per il covariante T della biquadratica f.

Posto $\alpha_x^4 = F_x^2 F'^2_x$, dove F_x^2 è una binaria quadratica, sarà (α) un punto della $T_x^6 \equiv 0$ e posto:

$$a_x^4 = \mu\, F_x^2\, F'^2_x + \nu\,(y\,x)^4 = \mu\, \alpha_x^4 + \nu\,(y\,x)^4$$

sarà (a) un punto della retta congiungente (α) col punto (y) di C.

(*) Clebsch, loc. cit., § 48.

Se ne deduce:

$$H_x^4 = \mu^2 h_x^4 + 2\mu\nu (y\,x)^2 \alpha_y^2 \alpha_x^2$$

dove al solito $h_x^4 = (\alpha\,\alpha')^2 \alpha_x^2 \alpha'^2_x$, ed anche:

$$T_x^6 = \mu^2 \nu \left[-(y\,x)^3 h_y h_x^3 + (y\,x)^2 (\alpha'\,\alpha)\, \alpha_y^2 \alpha_x \alpha'^3_x + (y\,x)\, \alpha_y^2 \alpha'_y \alpha_x^2 \alpha'^3_x\right] -$$
$$- \mu \nu^2 (y\,x)^5 \alpha_y^3 \alpha_x$$

dove si è tenuto conto della $(\alpha\,h)\, \alpha_x^3 h_x^3 \equiv 0$. È dunque $T_y^6 = 0$. Ossia:

L'equazione $T_y^6 = 0$ *rappresenta il cono di 3.° ordine che dal punto* (y) *di* C *projetta la superficie* $T_x^6 \equiv 0$.

E tenendo fisso nella $T_y^6 = 0$, invece di (y), (a):

Il cono (a due dimensioni) *che da* (a) *projetta* C *contiene sei rette secanti ulteriormente la* $T_x^6 \equiv 0$; *esse si appoggiano a* C *nei punti-radice di* T.

Altri significati geometrici del covariante T saranno dati più innanzi [V. al n.° 9.].

§ 2. Le quadriche di S_4. Coni quadrici formati coi piani trisecanti C.

5. L'equazione di una quadrica generica di S_4 è:

$$\lambda\, i + (\alpha\,H)^4 + (\psi\,a)^4 (\psi\,a')^4 = 0 \tag{1}$$

essendo λ un parametro, $\alpha_x^4\, \psi_x^8$ forme parametriche. Per le quadriche $i = 0$, $(\alpha\,H)^4 = 0$ si veda il n.° 3. Al sistema ∞^{14} (1) di tutte le quadriche appartiene quello ∞^5 delle quadriche contenenti C:

$$\lambda\, i + (\alpha\,H)^4 = 0.$$

Il sistema ∞^6 delle quadriche passanti per otto punti di C è dato dalla (1), quando per ψ_x^8 si ponga la forma che ha quei punti come punti-radice. La quadrica

$$(\psi\,a)^4 (\psi\,a')^4 = 0$$

è la quadrica fondamentale della polarità:

$$(\psi\,a)^4 (\psi\,b)^4 = 0$$

nella quale al punto (a) corrisponde l'S_3 determinato dai punti del gruppo

polare misto, dei quattro punti di contatto degli S_3 iperosculatori condotti per (a), rispetto a ψ^8_x:

Si considerino ora in particolare le quadriche (coni) luogo di S_2 trisecanti C.

Si cerchi dapprima il luogo degli S_2 trisecanti C nelle terne dell'involuzione cubica:

$$\mu\, u_x^3 + \nu\, v_x^3 = 0.$$

Le equazioni di un S_2 corrente sono:

$$\mu\,(u\,a)^3\, a_1 + \nu\,(v\,a)^3\, a_1 = 0$$
$$\mu\,(u\,a')^3\, a'_2 + \nu\,(v\,a')^3\, a'_2 = 0.$$

Eliminando μ, ν, si ha:

$$0 = \begin{vmatrix} (u\,a)^3\, a_1, & (v\,a)^3\, a_1 \\ (u\,a')^3\, a'_2, & (v\,a')^3\, a'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,(a\,a')\,\{(u\,a)^3\,(v\,a')^3 - (v\,a)^3\,(u\,a')^3\} =$$
$$= (a\,a')^2\,(u\,v)\,\{(u\,a)^2\,(v\,a')^2 + \frac{1}{2}\,(u\,a)\,(v\,a)\,(u\,a')\,(v\,a')\}.$$

L'equazione si può scrivere sotto forma più espressiva introducendo i combinanti elementari:

$$\vartheta = \vartheta_x^4 = (u\,v)\,u_x^2\,v_x^2\,, \quad J = (u\,v)^2$$

e ricordando le identità:

$$3\,(\vartheta\,H)^4 = (a\,a')^2\,(u\,v)\,\{(u\,a)^2\,(v\,a')^2 + 2\,(u\,a)\,(v\,a)\,(u\,a')\,(v\,a')\}$$
$$J\,i = 2\,(a\,a')^2\,(u\,v)\,\{(u\,a)^2\,(v\,a')^2 - (u\,a)\,(v\,a)\,(u\,a')\,(v\,a')\}.$$

Si ha così:

Il luogo degli S_2 trisecanti C nei gruppi dell'involuzione $\mu\, u_x^3 + \nu\, v_x^3 = 0$ *è il cono quadrico*

$$J\,i + 6\,(\vartheta\,H)^4 = 0. \qquad (2)$$

Esso appartiene al fascio di quadriche determinato dalla $i = 0$, e dalla quadrica polare di (ϑ) rispetto alla varietà delle corde. Inoltre:

Il vertice del cono è il punto (α), *posto* $\alpha_x^4 = J\,\vartheta_x^4 - 6\,(\vartheta\,\vartheta')^2\,\vartheta_x^2\,\vartheta_x'^2$.

Ed invero l'equazione dell'S_3 polare di (α) rispetto al cono (2) è [V. 1.]:

$$J\,(\alpha\,a)^4 + 6\,(\vartheta\,\alpha)^2\,(\vartheta\,a)^2\,(\alpha\,a)^2 = 0,$$

ossia, posto per brevità

$$\chi_x^4 = (\vartheta\,\vartheta')^2\,\vartheta_x^2\,\vartheta_x'^2\,,$$

sostituendo e riducendo:

$$J^2 (\vartheta a)^4 - 36 (\chi \vartheta)^2 (\chi a)^2 (\vartheta a)^2 = 0,$$

identicamente soddisfatta in forza delle relazioni (*):

$$(\chi \vartheta)^2 \chi_x^2 \vartheta_x^2 = \frac{1}{6} (\vartheta \vartheta')^4 . \vartheta''^4_x$$

$$(\vartheta \vartheta')^4 = \frac{1}{6} J^2.$$

6. Considero alcuni casi particolari, e suppongo dapprima che le u, v abbiano una radice in comune. Posto allora:

$$u_x^3 = (y\, x)\, m_x^2, \quad v_x^3 = (y\, x)\, n_x^2,$$
$$\theta_x^2 = (m\, n)\, m_x\, n_x,$$

con un semplice calcolo simbolico, che ommetto, si ha:

$$\vartheta_x^4 = \frac{2}{3} (y\, x)^2\, \theta_x^2, \quad J = -\frac{2}{3}\, \theta_y^2.$$

Segue:

L'equazione del cono luogo degli S_2 projettanti dal punto (y) di C le coppie dell'involuzione quadratica $\mu\, m_x^2 + \nu\, n_x^2$ è:

$$i\, \theta_y^2 - 6 (H \theta)^2 H_y^2 = 0. \qquad (3)$$

Il cono si può considerare anche come luogo degli S_2 trisecanti C, passanti per (y) ed armonici rispetto alla coppia $\theta_x^2 = 0$. Se nella (3) teniamo fisso (a), essa fornisce i punti in cui i due piani trisecanti C, passanti per (a) ed armonici rispetto alla coppia $\theta_x^2 = 0$, tagliano ulteriormente C.

Si supponga ora che le u, v abbiano in comune un fattore quadratico F_x^2, e si ponga:

$$u_x^3 = (y\, x)\, F_x^2, \quad v_x^3 = (z\, x)\, F_x^2$$
$$D = (F\, F')^2.$$

Si ha con un breve calcolo:

$$\vartheta_x^4 = \frac{1}{3} (y\, z)\, F_x^2\, F'^2_x, \quad J = \frac{2}{3} (y\, z)\, .\, D.$$

(*) V. Clebsch, loc. cit., § 40, form. (8), per la prima e Salmon-Fiedler, *Vorlesungen über die Algebra,* u. s. w. (Leipzig 1877), 202, per la seconda.

Quindi:

L'equazione del cono projettante C dalla corda congiungente i punti $F_x^2 = 0$ è

$$D\,i + 3\,(F\,H)^2\,(F'\,H)^2 = 0 \ (*). \tag{4}$$

In essa possiamo porre in evidenza i fattori lineari di $F_x^2 = (t\,x)\,(t'\,x)$, scrivendola sotto la forma:

$$(t\,t')^2\,i - 6\,H_t^2\,H_{t'}^2 = 0 \tag{5}$$

dove si è tenuto conto che $D = -\frac{1}{2}\,(t\,t')^2$. La (5), tenuto fisso (a) dà l'equazione della corrispondenza simmetrica relativa all'involuzione cubica segnata dai piani trisecanti passanti per (a). Dalla (4) o dalla (5), si deduce in particolare:

L'equazione del cono projettante C dalla tangente in x è:

$$H_x^4 = 0.$$

Se della corrispondenza data dalla (5) si considerano gli elementi doppi e di diramazione, si ha il teorema:

Per un punto (a) passano quattro piani trisecanti-tangenti a C.

I punti di contatto sono dati da:

$$H_x^4 = 0$$

e le ulteriori intersezioni da

$$2\,j\,a_x^4 - 3\,i\,H_x^4 = 0.$$

Per un punto della quadrica $i = 0$ queste ulteriori intersezioni coincidono coi punti di contatto degli S_3 iperosculatori condotti per esso, e quindi anche coi punti in cui l'S_3 in esso tangente alla quadrica taglia C.

Data ora la cubica u_x^3 ed introdotte le notazioni:

$$\Delta_x^2 = (u\,u')^2\,u_x\,u'_x$$
$$Q_x^3 = (u\,\Delta)\,u_x^2\,\Delta_x$$
$$R \ = (\Delta\,\Delta')^2$$

si consideri l'involuzione

$$\mu\,u_x^3 + \nu\,Q_x^3 = 0;$$

(*) Si noti che il primo membro di (4) coincide, a meno del fattor numerico 3, col discriminante $D_{\psi\psi}$ di $\psi_x^2 = (F\,a)^2\,a_x^2$, come risulta dalla (3) del § 60 di Clebsch, loc. cit.

per note formole (*) si ha:

$$\vartheta_x^4 = -\frac{1}{2}\Delta_x^2 . \Delta_x'^2, \quad J = R$$

e quindi:

Il luogo degli S_2 trisecanti C nei gruppi dell'involuzione $\mu u_x^3 + \nu Q_x^3$ è il cono di equazione

$$R\, i - 3(\Delta H)^2 (\Delta' H)^2 = 0. \qquad (6)$$

Il suo vertice è il punto (α), posto:

$$\alpha_x^4 = \Delta_x^2 \Delta_x'^2 \quad [V.\ 5.]$$

ossia è [V. 2. 4.] *il punto comune ai due piani osculatori nei punti $\Delta_x^2 = 0$.*

La (6), postovi per Δ_x^2 la forma generica F_x^2, diviene:

$$D\, i - 3(F H)^2 (F' H)^2 = 0 \qquad (7)$$

e, confrontata colla (4), dà luogo al seguente teorema:

Se (α) è il punto comune ai piani osculatori negli estremi di una corda di C, la quadrica $i = 0$, la quadrica polare di (α) rispetto alla varietà delle corde, il cono degli S_2 trisecanti passanti per (α) ed il cono che projetta C dalla corda considerata sono in un fascio e vi formano nell'ordine scritto un gruppo armonico.

7. Ritorno all'involuzione cubica generale:

$$\mu u_x^3 + \nu v_x^3 = 0$$

e insieme a questa considero l'altra (**)

$$\mu u^{*3}_x + \nu v^{*3}_x = 0$$

che ammette lo stesso jacobiano ϑ_x^4. È noto che si ha:

$$J^* = (u^* v^*)^3 = -J$$

come del resto risulta dalla relazione citata in fine di 5. Il cono degli S_2

(*) Clebsch, loc. cit., § 35, Form. (2) (4).

(**) V. Caporali, *Sul sistema di due forme binarie cubiche* (Mem. di Geometria, Napoli 1888, Pag. 219); Stephanos, *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (Mém. pres. à l'Acad. des Sciences, etc., XXVII) Pag. 43; Berzolari, *Sulla teoria dell'involuzione* ecc. (Rend. R. Acc. delle Scienze, Napoli, 1891) e *Sull' involuzione cubica* (ibidem).

trisecanti C nei gruppi di questa seconda involuzione è dunque di equazione:

$$J i - 6 (\vartheta H)^4 = 0 \tag{8}$$

ed il suo vertice è il punto (β) posto: $\beta_x^4 = J \vartheta_x^4 + 6 \chi_x^4$. I vertici (α) e (β) dei coni (2) ed (8) appartengono alla retta congiungente (ϑ) col suo punto hessiano (χ), i cui punti $(\varkappa \vartheta + \lambda \chi)$ corrispondono alle forme dell'involuzione sizigetica, o, come dirò brevemente, appartengono alla *retta sizigetica* (ϑ) (χ). Si ha così che:

La quadrica $i = 0$, *la quadrica polare di un punto* (ϑ) *rispetto alla varietà delle corde, i due coni luogo dei piani trisecanti* C *nei gruppi delle due involuzioni cubiche che hanno per jacobiano* ϑ_x^4, *appartengono ad un fascio e nell'ordine scritto vi formano un gruppo armonico. I vertici dei due coni giacciono sulla retta sizigetica condotta per* (ϑ) *e dividono armonicamente i punti* (ϑ) (χ) (*).

Se il punto (ϑ) appartiene alla quadrica $i = 0$, la quadrica polare, rispetto a $j = 0$, e i due coni coincidono nell'unica quadrica $(\vartheta H)^4 = 0$; ed invero, essendo $(\vartheta \vartheta')^4 = 0$, è pure $J = 0$. Inoltre il vertice del cono $(\vartheta H)^4 = 0$ è (χ), altro punto della $i = 0$, come risulta dalla:

$$(\chi \chi')^4 = \frac{1}{6} \overline{(\vartheta \vartheta')^4}^2 \;(**).$$

Se il punto (ϑ) descrive la retta sizigetica, i vertici dei coni (2), (8) descrivono un'involuzione quadratica, i cui punti doppî sono quelli in cui la retta incontra la quadrica $i = 0$. Onde: *I vertici dei coni* (2) (8) *dividono armonicamente i punti in cui la congiungente incontra la quadrica* $i = 0$. Per ciò che segue è bene inoltre osservare che le forme α_x^4 β_x^4 corrispondenti ai vertici (α) (β) hanno entrambe per hessiano ϑ_x^4, come si deduce da una formola nota (***), tenuto conto della già citata: $(\vartheta \vartheta')^4 = \frac{1}{6} J^2$.

È noto che ogni involuzione cubica si può considerare come involuzione delle prime polari di una biquadratica β_x^4. Posto quindi:

$$u_x^3 = \beta_1 \beta_x^3, \quad v_x^3 = \beta_2 \beta_x^3$$

sarà:

$$J = \beta_1 \beta'_2 (\beta \beta')^3 = \frac{1}{2} (\beta \beta')^4 = \frac{1}{2} \iota$$

$$\vartheta_x^4 = \beta_1 \beta'_2 (\beta \beta') \beta_x^2 \beta'^2_x = \frac{1}{2} (\beta \beta')^2 \beta_x^2 \beta'^2_x = \frac{1}{2} h_x^4.$$

(*) Il teorema in fine del N.° 6 è un caso particolare di questo.

(**) Clebsch, loc. cit., § 41, Pag. 138.

(***) Clebsch, loc. cit., § 41, Form. (5).

Da quanto precede si deduce:

Il luogo degli S_2 trisecanti C nei gruppi polari di una biquadratica β_x^4 è il cono quadrico

$$\iota\, i + 6\,(h\,H)^4 = 0 \tag{9}$$

di vertice (α), *essendo α_x^4 la biquadratica che, con β_x^4, ha per hessiano h_x^4.*

Il cono di vertice (β), luogo degli S_2 trisecanti C nelle terne apolari a β_x^4 (*), per il teorema sopra enunciato, dovrà essere conjugato armonico di (9), rispetto ad $i = 0$, $(h\,H)^4 = 0$, nel fascio determinato da queste quadriche; quindi:

Il luogo degli S_2 trisecanti C e passanti per (β) *è il cono quadrico*

$$\iota\, i - 6\,(h\,H)^4 = 0. \tag{10}$$

Così, nell'equazione del cono degli S_2 trisecanti, sono poste in evidenza le coordinate del vertice (**).

§ 3. Combinanti di una retta.
La superficie $T_x^6 \equiv 0$ e le sue trisecanti (rette sizigetiche).
I complessi lineari $(U\,\vartheta)^6 = 0$.

8. Date due biquadratiche

$$\left.\begin{aligned} a_x^4 &= \bar{a}_0\, x_1^4 + 4\,\bar{a}_1\, x_1^3 x_2 + 6\,\bar{a}_2\, x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{a}_3\, x_1 x_2^3 + \bar{a}_4\, x_2^4 \\ b_x^4 &= \bar{b}_0\, x_1^4 + 4\,\bar{b}_1\, x_1^3 x_2 + 6\,\bar{b}_2\, x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{b}_3\, x_1 x_2^3 + \bar{b}_4\, x_2^4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

le coordinate puntuali della retta (a) (b) sono i minori della matrice:

$$\left\|\begin{matrix} \bar{a}_0, & \bar{a}_1, & \bar{a}_2, & \bar{a}_3, & \bar{a}_4 \\ \bar{b}_0, & \bar{b}_1, & \bar{b}_2, & \bar{b}_3, & \bar{b}_4 \end{matrix}\right\| \tag{2}$$

(*) Se un S_2 trisecante C nei punti-radice di u_x^3 passa per (β) dev' essere $(\beta\, u)^3\, \beta_x = 0$ onde u_x^3 è *apolare* alla β_x^4.

(**) Si noti l'analogia fra la trattazione presente e quella relativa alla cubica gobba nel § IV della Nota: *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba* del prof. Berzolari. (Rend. Circ. Mat. di Palermo, Tomo V, 1890.) Cfr. pure le Note già citate: *Sulla teoria dell'involuzione* ecc. e *Sull'involuzione cubica.*

D'altra parte ogni *combinante* delle forme (1) si esprime in modo intero (com'è noto) per mezzo dei minori di (2). Segue che l'annullarsi di un invariante combinante delle (1) rappresenta un *complesso* di rette, e che l'annullarsi identico di un covariante combinante delle (1) rappresenta il sistema di rette intersezione completa dei complessi rappresentati dall'annullarsi dei coefficienti.

Introduco i due combinanti elementari:

$$\vartheta_x^6 = (a\,b)\,a_x^3\,b_x^3$$

$$\Lambda_x^2 = (a\,b)^3\,a_x\,b_x$$

ed osservo che il grado di una data espressione nelle coordinate di retta equivale al numero complessivo di simboli ϑ, Λ in essa introdotti.

Per la retta (a) (b) conduco un S_3 e siano (x) (y) (z) tre dei quattro punti in cui esso sega C. Sarà allora (V. 2):

$$(a\,b)\,a_x\,a_y\,a_z\,b_x\,b_y\,b_z = 0 \tag{3}$$

od anche (come risulta da un breve calcolo):

$$\vartheta_x^2\,\vartheta_y^2\,\vartheta_z^2 - \frac{1}{10}\left[(y\,z)^2\,\Lambda_x^2 + (z\,x)^2\,\Lambda_y^2 + (x\,y)^2\,\Lambda_z^2\right] = 0. \tag{4}$$

Teniamo fisse in (4) le x, y, z. *Essa rappresenta il complesso lineare delle rette secanti l'S_2 (x) (y) (z)*. In particolare sarà:

$$\vartheta_x^4\,\vartheta_z^2 - \frac{1}{5}\,(x\,z)^2\,\Lambda_x^2 = 0 \tag{5}$$

il complesso delle rette secanti l'S_2 tangente a C in (x) e secante ulteriormente in (z) ed analogamente:

$$\vartheta_6^x = 0 \tag{6}$$

il complesso delle rette secanti il piano osculatore in (x). La (5), tenuta fissa la retta, rappresenta la corrispondenza (4, 2) determinata dai piani trisecanti-tangenti C che si appoggiano alla retta. Nella (6) si tenga fisso ϑ:

Ad ogni retta si appoggiano 6 piani osculatori (*); *i punti di contatto sono i punti-radice di* ϑ_x^6. Il teorema si può enunciare anche sotto la forma: *Per ogni retta passano sei S_3 osculatori; i punti di contatto sono i punti-radice di* ϑ_x^6.

(*) La prima parte di questo teorema si può anche dedurre da 4. 1).

Se (x) è uno dei punti di contatto di un S_3 passante per la retta e bitangente a C, la (5) deve ammettere (z) come radice doppia. Onde:

Per una retta passano quattro S_3 bitangenti C, ed i punti di contatto sono radici della:

$$(\vartheta\,\vartheta')^2\,\vartheta_x^4\,\vartheta'^4_x - \frac{2}{5}\,\vartheta_x^6\,\Lambda_x^2 = 0. \qquad (7)$$

La (7), tenuto fisso (x), rappresenta un complesso quadratico di cui è ovvio il significato geometrico.

9. L'annullarsi identico del secondo combinante elementare:

$$\Lambda_x^2 \equiv 0$$

rappresenta il sistema ∞^3 di rette, comune agli ∞^2 complessi lineari $(F\,\Lambda)^2 = 0$, essendo F_x^2 una forma parametrica. D'altra parte per una *retta sizigetica* (*) $(a)\,(H)$ si ha da una nota formola (**):

$$\Lambda_x^2 = (a\,H)^3\,a_x\,H_x \equiv 0$$

e, poichè una forma biquadratica appartiene ad una ed in generale ad una sola involuzione sizigetica, le rette sizigetiche sono ∞^3. Segue:

Il sistema $\Lambda_x^2 \equiv 0$ è il sistema delle rette sizigetiche.

Nella polarità determinata dal complesso $(F\,\Lambda)^2 = 0$, al punto (b) corrisponde l'iperpiano delle rette del complesso passanti per esso:

$$(a\,b)^3\,(F\,a)\,(F\,b) = 0. \qquad (8)$$

Per $b_x^4 = F'^2_x\,F''^2_x$, la (8) diventa:

$$(F'\,a)^2\,(F''\,a)\,(F\,a)\,(F\,F'') = 0$$

identicamente soddisfatta. Segue:

Il centro del complesso $(F\,\Lambda)^2 = 0$ è il punto comune ai piani osculatori a C nei due punti radici di F_x^2.

Quindi (V. 4. III)):

Il luogo dei centri dei complessi lineari contenenti il sistema delle rette sizigetiche è la superficie del 4.° ordine $T_x^6 \equiv 0$.

(*) V. N.° 7.

(**) Clebsch, loc. cit., § 40, Form. (5).

Inoltre, se si ricorda che all'involuzione sizigetica appartengono i quadrati dei fattori quadratici φ_x^2, ψ_x^2, χ_x^2 di T_x^6 (*), risulta:

Le rette sizigetiche costituiscono il sistema delle trisecanti la superficie $T_x^6 \equiv 0$ (**). *I tre punti di secamento sono le intersezioni delle coppie di piani osculatori a C nei punti-radice dei tre fattori quadratici di* T_x^6.

Date due forme quadratiche m_x^2, n_x^2 si ponga, come altrove,

$$\theta_x^2 = (m\,n)\,m_x\,n_x\,.$$

All'involuzione quadratica:

$$\mu\, m_x^2 + \nu\, n_x^2 = 0 \tag{9}$$

corrisponde il fascio di complessi lineari:

$$\mu\,(m\,\Lambda)^2 + \nu\,(n\,\Lambda)^2 = 0 \tag{10}$$

ed il luogo dei centri è la conica dei punti (α) pei quali:

$$\alpha_x^4 \equiv \mu^2\, m_x^2\, m'^2_x + 2\,\mu\,\nu\, m_x^2\, n_x^2 + \nu^2\, n_x^2\, n'^2_x \tag{11}$$

mentre il sistema ∞^4 di rette base del fascio è caratterizzato dalla

$$\Lambda_x^2 = \rho\,\theta_x^2\,, \tag{12}$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità od anche dalla:

$$(\theta\,\Lambda)\,\theta_x\,\Lambda_x \equiv 0.$$

Poichè all'involuzione (9) appartengono i quadrati dei fattori lineari $(y\,x)$ $(z\,x)$ del jacobiano θ_x^2, al fascio (10) appartengono i due complessi

$$\Lambda_y^2 = 0, \qquad \Lambda_z^2 = 0$$

ed alla conica (11) i punti (y) (z) radici del jacobiano. Inoltre la nota relazione (***):

$$\theta_x^2\,\theta'^2_x = -\frac{1}{2}\left\{(n\,n')^2\, m_x^2\, m'^2_x - 2\,(m\,n)^2\, m'^2_x\, n'^2_x + (m\,m')^2\, n_x^2\, n'^2_x\right\} \tag{13}$$

dimostra che al piano della conica (11) appartiene il punto d'intersezione dei piani osculatori a C nei punti-radice di θ_x^2. Da quanto precede si deduce:

(*) Clebsch, loc. cit., § 44, Form. (4).

(**) Il che si può anche dedurre dal teorema precedente, per mezzo delle considerazioni geometriche svolte in: Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti R. Ist.° Ven.°, Tomo II, Serie 7ª), N.° 7.

(***) Clebsch, loc. cit., § 57, Form. (1).

La $T_x^6 \equiv 0$ *contiene* ∞^2 *coniche ed è quindi proiezione della nota superficie di* Veronese (*). *Una retta generica ed il sistema* ∞^3 *delle rette sizigetiche determinano un sistema* ∞^4, *base di un fascio di complessi, e la conica luogo dei centri sega C nei punti-radice* (v. Form. (12)) *del combinante* Λ_x^2 *relativo alla retta data* (come a tutte le altre del sistema ∞^4).

Si noti che se la retta data ha per combinante Λ_x^2 il quadrato di una forma lineare $(y\,x)$, la conica dei centri tocca in (y) la C. Ne segue:

Ogni retta appartiene a due complessi lineari contenenti il sistema delle rette sizigetiche ed aventi il centro su C; le rette per le quali i due complessi coincidono formano un complesso quadratico $(\Lambda\,\Lambda')^2 = 0$.

Se si tiene presente che il punto d'incontro dei piani osculatori a C nei punti-radice di θ_x^2 è un punto generico di $T_x^6 \equiv 0$ e che le rette condotte per esso nel piano della conica (11) sono trisecanti la superficie, risulta:

Per un punto P della $T_x^6 \equiv 0$ *passa un fascio di rette sizigetiche, projettante da P la corda congiungente i punti di contatto dei piani osculatori condotti a C da P.*

Una retta sizigetica (come ogni altra retta) incontra tre corde di C, perchè $j = 0$ è una *forma* di 3.° ordine; ma poichè essa incontra $T_x^6 \equiv 0$ nei punti d'intersezione delle coppie di S_2 osculatori corrispondenti ai fattori quadratici di T_x^6, dal teorema precedente si deduce:

I fattori quadratici del covariante T_x^6 *rappresentano su C le tre coppie di punti d'appoggio delle tre corde secanti la retta sizigetica* (*a*) (*H*) (**).

Si ricordi (***) che dei tre fattori quadratici

$$\varphi_x^2 \; \psi_x^2 \; \chi_x^2$$

uno qualunque è jacobiano degli altri due. Indicando (in corrispondenza ai tre fattori) con:

$$P_\varphi, \quad P_\psi, \quad P_\chi$$

i tre punti in cui la retta sizigetica incontra la $T_x^6 \equiv 0$, e presa come forma θ_x^2 ad es. φ_x^2, per ciò che precede, la corrispondente conica della superficie

---

(*) Veronese, *La superficie omaloide normale* ecc. (Mem Acc. Lincei, Serie III, Vol. 19, Pag. 344). Anche questa proposizione si può dedurre geometricamente da quelle già enunciate, secondo Castelnuovo, (loc. cit.).

(**) Più innanzi (V. 15) si troveranno anche i punti in cui le corde segano la retta sizigetica.

(***) Clebsch, loc. cit., § 45, Form. (1).

dovrà passare per i punti P_ψ, P_χ e per i punti-radice di φ_x^2 su C. Inoltre le rette del piano della conica sono bisecanti della superficie. Segue:

Le bisecanti della superficie $T_x^6 \equiv 0$ che si appoggiano ad una retta sizigetica si distribuiscono nei tre piani determinati da questa colle tre corde di C che la segano. Ciascun piano taglia la superficie in una conica che passa per gli estremi della corda corrispondente e per i punti d'incontro delle coppie di piani osculatori negli estremi delle altre due corde (*).

Si prenda ora il punto P della $T'^6_x \equiv 0$ su C, il che equivale a supporre, che θ_x^2 sia il quadrato di una forma lineare $(y\,x)$. La conica corrispondente passa allora per P, ed è evidentemente quella segnata sul piano ivi osculatore dagli altri piani osculatori a C. Le rette condotte per P nel piano osculatore sono dunque sizigetiche ed hanno riunite in P due intersezioni colla superficie. Segue:

Le rette sizigetiche che si appoggiano a C si distribuiscono nei fasci posti nei piani osculatori, che sono anche piani tangenti nei singoli punti di C a $T_x^6 \equiv 0$ (**).

10. Data una retta, è determinata [V. 8.] la sestica ϑ_x^6 i cui punti-radice sono quelli di contatto dei piani osculatori secanti la retta.

Data invece la sestica, ai sei piani osculatori nei punti-radice si appoggiano, come è ben noto, *cinque* rette; algebricamente: esistono 5 involuzioni biquadratiche aventi per jacobiano la sestica ϑ_x^6. La ricerca dei combinanti Λ_x^2 relativi alle cinque involuzioni (nella presente interpretazione alle cinque rette) è oggetto della II parte del lavoro già citato di Stephanos (***).

(*) Di qui scende anche il significato geometrico del covariante T_x^6 dato al N.° 4. III).

(**) La C si trova dunque rispetto a $T_x^6 = o$ nelle condizioni della curva C^4 considerata dal Sig. Segre al N.° 43 della Memoria *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni* (Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino, 1888) e della γ^4 introdotta dal Sig. Castelnuovo (loc. cit.) in fine del N.° 7 (Pag. 18). Si noti che projettando da un punto di S_4 su un S_3 la curva C e la superficie $T_x^6 = o$, per quanto si è visto, si ottiene una quartica razionale e la superficie di Steiner di cui essa è assintotica. Il punto triplo e le rette doppie della superficie di Steiner sono projettati dalla retta sizigetica che passa per il centro di projezione e dai corrispondenti piani di bisecanti la $T_x^6 = o$. Se il centro di projezione è preso sulla $T_x^6 = o$, invece della superficie di Steiner, si ha una superficie del 3° ordine con retta doppia.

(***) Loc. cit., Pag. 57 e seguenti.

Se la sestica ϑ^6_x relativa ad una retta (a) (b) è *apolare* ad una data sestica U^6_x, si ha $(U\vartheta)^6 = 0$. Segue:

Le rette che si appoggiano a sestuple di piani osculatori a C in sestiche apolari ad una data U^6_x formano un complesso lineare $(U\vartheta)^6 = 0$ (*).

Si noti che per una corda (y) (z) è $\vartheta^6_x = (y\,x)^3\,(z\,x)^3$, ed in particolare per la tangente in (y) è $\vartheta^6_x = (y\,x)^6$. Si deduce:

Al complesso $(U\vartheta)^6 = 0$ appartengono le corde congiungenti ogni punto (y) col suo terzo gruppo polare $U^3_y\,U^3_x = 0$, rispetto alla U^6_x. In particolare appartengono al complesso le tangenti nei punti-radice della U^6_x.

Nella polarità del complesso al punto (b) corrisponde l'iperpiano:

$$(a\,b)\,(U\,a)^3\,(U\,b)^3 = 0. \tag{14}$$

Posto:

$$I^4_x = (U\,U')^4\,U^2_x\,U'^2_x$$

(dove $U^6_x = U'^6_x$), si faccia $(b) = (I)$ in (14); si ottiene:

$$(a\,I)\,(U\,a)^3\,(U\,I)^3 = 0$$

che è un'identità, perchè $(U\,I)^3\,U^3_x\,I_x \equiv 0$ (**). Segue:

Il punto (I) è il centro del complesso $(U\vartheta)^6 = 0$.

L'annullarsi identico di I^4_x è condizione necessaria e sufficiente perchè U^6_x sia il covariante sestico di una biquadratica α^4_x (***), ossia perchè, posto come altrove $h^4_x = (\alpha'\,\alpha'')^2\,\alpha'^2_x\,\alpha''^2_x$, sia:

$$U^6_x = t^6_x = (\alpha\,h)\,\alpha^3_x\,h^3_x\,.$$

Segue: *Fra i complessi $(U\vartheta)^6 = 0$, i complessi $(t\,\vartheta)^6 = 0$, ed essi soli, sono speciali.*

In questo caso la (14) diventa:

$$(a\,b)\,(t\,a)^3\,(t\,b)^3 = 0$$

e richiamando una formola nota (****):

$$(\alpha\,a)^4\,(h\,b)^4 - (h\,a)^4\,(\alpha\,b)^4 = 0.$$

(*) Estensione dei complessi lineari relativi alla cubica gobba studiati da STURM, *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve* (Crelle's Journal Bd. 86) N.° 23.

(**) V. CLEBSCH, loc. cit., § 76, Pag. 284.

(***) CLEBSCH, loc. cit., § 110.

(****) CLEBSCH, loc. cit., § 42, Form. (4).

Essa diviene quindi un'identità pei punti (b) soddisfacenti alle:

$$(\alpha\, b)^4 = 0, \quad (h\, b)^4 = 0.$$

Se ne deduce:

Il complesso $(t\, \vartheta)^6 = 0$ *è quello delle rette secanti il piano polare della retta sizigetica* (α) (h) *rispetto alla quadrica* $i = 0$.

§ 4. Interpretazione delle η_{rs} di Stephanos. La varietà cubica $(U\, T)^6 = 0$ con dieci punti doppi.

11. Siano ora date due rette (a) (b), (c) (d) e si ponga:

$$\vartheta_x^6 = (a\, b)\, a_x^3\, b_x^3\,; \quad \Lambda_x^2 = (a\, b)^3\, a_x\, b_x$$

$$\bar{\vartheta}_x^6 = (c\, d)\, c_x^3\, d_x^3\,; \quad \bar{\Lambda}_x^2 = (c\, d)^3\, c_x\, d_x\,.$$

L'S_3 determinato dalle due rette sega C nei punti-radice della biquadratica

$$\alpha_x^4 = (a\, b)\, (c\, d)\, (a\, c)\, (b\, c)\, (a\, d)\, (b\, d)\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x\,. \tag{1}$$

Con un breve calcolo si trova:

$$\alpha_x^4 = (\vartheta\, \bar{\vartheta})^4\, \vartheta_x^2\, \bar{\vartheta}_x^2 - \frac{1}{5}\, (\vartheta\, \bar{\Lambda})^2\, \vartheta_x^4 - \frac{1}{5}\, (\bar{\vartheta}\, \Lambda)^2\, \bar{\vartheta}_x^4 - \frac{4}{25}\, \Lambda_x^2\, \bar{\Lambda}_x^2\,. \tag{2}$$

Se le due rette coincidono deve essere identicamente $\alpha_x^4 = 0$; onde si ottiene l'identità

$$(\vartheta\, \vartheta')^4\, \vartheta_x^2\, \vartheta_x'^2 - \frac{2}{5}\, (\vartheta\, \Lambda)^2\, \vartheta_x^4 - \frac{4}{25}\, \Lambda_x^2\, \Lambda_x'^2 = 0 \tag{3}$$

che lega i due combinanti di una retta (*).

Si supponga che le due rette abbiano lo stesso combinante Λ_x^2.

In tal caso dalle (2) (3) si deduce:

$$\alpha_x^4 = (\vartheta\, \bar{\vartheta})^4\, \vartheta_x^2\, \bar{\vartheta}_x^2 - \frac{1}{5}\, (\vartheta\, \Lambda)^2\, \vartheta_x^4 - \frac{1}{5}\, (\bar{\vartheta}\, \Lambda)^2\, \bar{\vartheta}_x^4 - \frac{4}{25}\, \Lambda_x^2\, \Lambda_x'^2$$

$$0 = (\vartheta\, \vartheta')^4\, \vartheta_x^2\, \vartheta_x'^2 - \frac{2}{5}\, (\vartheta\, \Lambda)^2\, \vartheta_x^4 - \frac{4}{25}\, \Lambda_x^2\, \Lambda_x'^2$$

$$0 = (\bar{\vartheta}\, \bar{\vartheta}')^4\, \bar{\vartheta}_x^2\, \bar{\vartheta}_x'^2 - \frac{2}{5}\, (\bar{\vartheta}\, \Lambda)^2\, \bar{\vartheta}_x^4 - \frac{4}{25}\, \Lambda_x^2\, \Lambda_x'^2$$

(*) La (3) si trova in Stephanos, loc. cit., Pag. 68 Form. (2).

e, con opportuna combinazione lineare:

$$\alpha_x^4 = -\frac{1}{2}\{(\vartheta\,\vartheta')^4\,\vartheta_x^2\,\vartheta'^2_x - 2\,(\vartheta\,\overline{\vartheta})^4\,\vartheta_x^2\,\overline{\vartheta}_x^2 + (\overline{\vartheta}\,\overline{\vartheta}')^4\,\overline{\vartheta}_x^2\,\overline{\vartheta}'^2_x\}.$$

Onde:

Se due rette hanno lo stesso combinante Λ_x^2, l'S_3 a cui appartengono, sega C nei punti-radice della biquadratica

$$\alpha_x^4 = -\frac{1}{2}(\varepsilon\,\varepsilon')^4\,\varepsilon_x^2\,\varepsilon'^2_x$$

indicando con ε_x^6 la differenza fra i due combinanti sestici.

Si noti (vedi n.° prec.) che (α) è il centro del complesso $(\varepsilon\,\vartheta)^6 = 0$.

Si supponga ora invece che le due rette abbiano lo stesso combinante ϑ_x^6. Ancora dalle (2) (3) si ha:

$$\alpha_x^4 = (\vartheta\,\vartheta')^4\,\vartheta_x^2\,\vartheta'^2_x - \frac{1}{5}(\vartheta\,\Lambda)^2\,\vartheta_x^4 - \frac{1}{5}(\vartheta\,\overline{\Lambda})^2\,\vartheta_x^4 - \frac{4}{25}\Lambda_x^2\,\overline{\Lambda}_x^2$$

$$0 = (\vartheta\,\vartheta')^4\,\vartheta_x^2\,\vartheta'^2_x - \frac{2}{5}(\vartheta\,\Lambda)^2\,\vartheta_x^4 - \frac{4}{25}\Lambda_x^2\,\Lambda'^2_x$$

$$0 = (\vartheta\,\vartheta')^4\,\vartheta_x^2\,\vartheta'^2_x - \frac{2}{5}(\vartheta\,\overline{\Lambda})^2\,\vartheta_x^4 - \frac{4}{25}\overline{\Lambda}_x^2\,\overline{\Lambda}'^2_x$$

e, con opportuna combinazione lineare:

$$\alpha_x^4 = \frac{2}{25}\{\Lambda_x^2\,\Lambda'^2_x - 2\,\Lambda_x^2\,\overline{\Lambda}_x^2 + \overline{\Lambda}_x^2\,\overline{\Lambda}'^2_x\}$$

onde segue:

Se due rette si appoggiano ad una stessa sestupla di piani osculatori, l'S_3 a cui appartengono è bitangente a C ed i punti di contatto sono radici della quadratica $\Lambda_x^2 - \overline{\Lambda}_x^2$, essendo $\Lambda_x^2, \overline{\Lambda}_x^2$ i due combinanti quadratici.

Ricordando che le rette secanti una sestupla di piani osculatori sono cinque e che per una retta passano quattro S_3 bitangenti, segue:

I quattro iperpiani bitangenti passanti per una retta sono quelli che da essa projettano le altre quattro secanti la stessa sestupla di piani osculatori.

Indicando con:

$$\Lambda_1\ \Lambda_2\ \Lambda_3\ \Lambda_4\ \Lambda_5$$

i combinanti Λ_x^2 relativi alle cinque rette che ammettono lo stesso combinante $\vartheta = \vartheta_x^6$ e richiamando l'ultimo teorema del n.° 8., si ottiene la formola:

$$(\vartheta,\ \vartheta)^2 - \frac{2}{5}\Lambda_1\,\vartheta = \rho\,(\Lambda_1 - \Lambda_2)\,(\Lambda_1 - \Lambda_3)\,(\Lambda_1 - \Lambda_4)\,(\Lambda_1 - \Lambda_5) \qquad (4)$$

dove ρ è un fattore di proporzionalità. Insieme alla (4) sussistono le formole che se ne deducono colla permutazione degli indici (*).

In generale la forma $(\vartheta, \vartheta)^2 - \frac{2}{5} \Lambda_r \vartheta$ si scompone dunque in quattro fattori quadratici η_{rs} $(s = 1, 2, 3, 4)$, essendo

$$\eta_{rs} = \lambda (\Lambda_r - \Lambda_s) \quad (5)$$

dove λ è un fattore di proporzionalità (**).

12. Il complesso $(U \vartheta)^6 = 0$ ed il sistema ∞^3 delle rette sizigetiche $\Lambda_x^2 \equiv 0$ hanno in comune un sistema $\infty^2 \Gamma$ di rette, i cui punti costituiscono una *forma* nell'S_4. Risulta subito:

La forma luogo delle rette comuni al complesso $(U \vartheta)^6 = 0$ *ed al sistema delle sizigetiche è del terzo ordine e di equazione* $(U\, T)^6 = 0$.

Il sistema ∞^2 di rette è base del sistema ∞^3 di complessi:

$$\mu (U \vartheta)^6 + \nu (m\, \Lambda)^2 = 0 \quad (6)$$

dove m_x^2 è una forma parametrica. I centri dei complessi (6) giacciono sulla $(U\, T)^6 = 0$ (***). Ed invero se (a) è centro del complesso si ha identicamente:

$$\mu (U\, a)^3\, U_x^3\, a_x + \nu (m\, a)\, m_x\, a_x^5 = 0$$

onde anche:

$$\mu (U\, a)^3 (U\, H)^3 (a\, H) + \nu (m\, a) (m\, H) (a\, H)^5 = 0$$

e, per una formola già citata (****), appunto:

$$(U\, T)^6 = 0.$$

Siano G_r $(r = 1, 2, 3, 4, 5)$ le rette secanti la sestupla dei piani osculatori nei punti-radice di U_x^6; sia Λ_r il combinante quadratico di G_r ed ancora $\eta_{rs} = \lambda (\Lambda_r - \Lambda_s)$. I piani osculatori nei punti-radice di η_{rs} si segano in un punto della $T_x^6 \equiv 0$, che dirò brevemente punto $[\eta_{rs}]$.

Se (α) (β) è una delle rette G_r, ed (a) (H) una delle rette del sistema

---

(*) La (4) si trova pure in: STEPHANOS loc. cit., Pag. 97, con diverse notazioni.

(**) Anche le forme η_{rs} sono introdotte dallo STEPHANOS, (loc. cit., Pag. 97).

(***) Come risulterebbe anche geometricamente (Cfr. CASTELNUOVO, loc cit., N. 10, Pag. 23).

(****) CLEBSCH. loc. cit., § 40, Form. (5).

$\infty^2 \Gamma$, si ha:

$$(\alpha \beta) \alpha_x^3 \beta_x^3 = U_x^6$$

$$(\alpha \beta) (\alpha T)^3 (\beta T)^3 = 0$$

ossia, per una formola citata:

$$(\alpha a)^4 (\beta H)^4 - (\beta a)^4 (\alpha H)^4 = 0,$$

relazione questa soddisfatta per ogni punto del piano:

$$(\alpha a)^4 = 0 \quad (\beta a)^4 = 0$$

polare di (α) (β) rispetto ad $i = 0$. Segue:

Le rette del sistema Γ sono tutte, e sole, le rette sizigetiche secanti i cinque piani polari delle rette G_r rispetto alla $i = 0$ (*).

Applico alle Λ_r, Λ_s l'identità (3), ed ottengo:

$$(U, U)^4 - \frac{2}{5} (U, \Lambda_r)^2 - \frac{4}{25} \Lambda_r^2 = 0$$

$$(U, U)^4 - \frac{2}{5} (U, \Lambda_s)^2 - \frac{4}{25} \Lambda_s^2 = 0.$$

Sottraendo e ricordando la (5) si ha:

$$(U, \eta_{rs})^2 + \frac{2}{5} (\Lambda_r + \Lambda_s) \eta_{rs} = 0 \tag{7}$$

e ponendo:

$$\eta_{rs} = (y\, x) (z\, x)$$

si ha:

$$U_y\, U_z\, U_x^4 + \frac{2}{5} (\Lambda_r + \Lambda_s) (y\, x) (z\, x) = 0$$

onde si deducono le:

$$\left. \begin{array}{l} U_y\, U_z^5 = 0 \\ U_z\, U_y^5 = 0 \text{ (**)}. \end{array} \right\} \tag{8}$$

Le rette sizigetiche passanti per $[\eta_{rs}]$ sono quelle che da esso projettano i punti della corda (y) (z) [V. 9.]; dico che appartengono al sistema Γ. Infatti una generica di queste è la congiungente il punto $[\eta_{rs}]$ corrispondente

(*) I cinque piani sono quelli secanti le tangenti a C nei punti-radice di $U_x^6 = 0$.

(**) Per le (7), (8), Cfr. STEPHANOS, loc. cit., Pag. 109, 112.

alla biquadratica $(y\,x)^2\,(z\,x)^2$, col punto della corda corrispondente alla $\mu\,(y\,x)^4 + \nu\,(z\,x)^4$, ed ha quindi per combinante sestico:

$$\vartheta_x^6 = \frac{1}{2}\,(z\,y)\,\{\,\mu\,(y\,x)^5\,(z\,x) - \nu\,(z\,x)^5\,(y\,x)\,\}.$$

Dalle (8) scende subito $(U\,\vartheta)^6 = 0$. Onde:

Al sistema Γ *appartengono i dieci fasci di raggi che dai dieci punti* $[\eta_{rs}]$ *projettano le corde congiungenti i punti-radice delle corrispondenti forme* η_{rs}.

Ne segue (*) che *i punti* $[\eta_{rs}]$ *sono doppi per la* $(U\,T)^6 = 0$. Inoltre, poichè per la retta G_r passano gli S_3 bitangenti nei punti-radice delle $\eta_{rs}\,\eta_{rt}\,\eta_{ru}\,\eta_{rv}$ (essendo $r\,s\,t\,u\,v$ una qualunque permutazione di 1 2 3 4 5), si ha che *i punti* $[\eta_{rs}]$ $[\eta_{rt}]$ $[\eta_{ru}]$ $[\eta_{rv}]$ *giacciono nel piano* $[r]$, *polare di* G_r *rispetto alla* $i = 0$. Se nelle (5) per le $\eta_{uv}\,\eta_{vt}\,\eta_{tu}$ si prende lo stesso fattore λ, se ne deduce:

$$\eta_{uv} + \eta_{vt} + \eta_{tu} = 0$$

e ne scende [V 9.] che *i punti* $[\eta_{uv}]$ $[\eta_{vt}]$ $[\eta_{tu}]$ *sono sopra una stessa conica della* $T_x^6 \equiv 0$. D'altra parte, come dimostra lo Stephanos (**), il jacobiano di due qualunque di queste tre forme è la η_{rs}, ossia: *il piano* $[\eta_{uv}]$ $[\eta_{vt}]$ $[\eta_{tu}]$ *è il piano* $[r,\,s]$ *del fascio di rette* Γ *di centro* $[\eta_{rs}]$.

Ne segue che ogni retta $[\eta_{rs}]$ $[\eta_{uv}]$ (s'intende per indici $r\,s\,u\,v$ distinti) è retta Γ (***).

Riassumendo:

La $(U\,T)^6 = 0$ *contiene quindici piani* $[r]$, $[r,\,s]$ *e dieci punti doppî* $[\eta_{rs}]$. *In ogni piano giacciono quattro punti*:

$$[\eta_{rs}],\ [\eta_{rt}],\ [\eta_{ru}],\ [\eta_{rv}]\ \textit{in}\ [r],$$

$$[\eta_{rs}];\ [\eta_{uv}],\ [\eta_{vt}],\ [\eta_{tu}]\ \textit{in}\ [r,\,s].$$

Per ogni punto $[\eta_{rs}]$ *passano sei piani*:

$$[r],\ [s];\ [r,\,s];\ [u,\,v],\ [v,\,t],\ [t,\,u].$$

(*) Castelnuovo, loc. cit., N.° 9, Pag. 26.

(**) Loc. cit., Pag. 109.

(***) Applicando la polarità rispetto alla $i = 0$, il piano $[r,s]$ risulta come polare della retta comune all' S_3 delle $G_r\,G_s$ ed agli S_3 osculatori nei due punti di contatto di questo con C. E poichè in tale piano sono $[\eta_{uv}]$ $[\eta_{vt}]$ $[\eta_{tu}]$, la retta giace nei corrispondenti S_3 bitangenti ossia è la *comune secante delle* $G_t\,G_u\,G_v$.

Ogni piano $[r]$ *è incontrato da tutte le rette* Γ, *ogni piano* $[r, s]$ *ne contiene un fascio* (*di centro* $[\eta_{rs}]$) (*).

L'osservazione del sig. Stephanos (loc. cit., Pag. 110) che, date le tre forme $\eta_{rs}\,\eta_{rt}\,\eta_{ru}$ ad arbitrio, sono determinate le rimanenti sette forme η, acquista particolare evidenza nella presente interpretazione geometrica. Ed invero i tre iperpiani bitangenti a C nei punti-radice rispettivamente di η_{rs}, η_{rt}, η_{ru} hanno per comune intersezione la retta G_r, data la quale sono determinate le rimanenti rette G e quindi le rimanenti forme η.

13. La quadrica polare e l'iperpiano polare di un punto (α) rispetto alla $(U\,T)^6 = 0$, sono dati [V. 1] rispettivamente dalle:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha H)(U\alpha)^3(UH)^3 + (\alpha a')^2(a a')(U\alpha)^2(Ua)^3(Ua') - \\ \quad -(\alpha a')^2(\alpha a)(U\alpha)(Ua)^3(Ua')^2 = 0\end{array}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a h)(Ua)^3(Uh)^3 + (a \alpha')^2(\alpha \alpha')(Ua)^2(U\alpha)^3(U\alpha') - \\ \quad -(a \alpha')^2(a \alpha)(Ua)(U\alpha)^3(U\alpha')^2 = 0.\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Ne seguono le proprietà sotto enunciate:

1.°) *La quadrica polare di un punto* (α) *rispetto alla* $(U\,T)^6 = 0$ *sega la curva* C *negli otto punti-radice del jacobiano* $(U\alpha)\ U_x^5\,\alpha_x^3$.

E per $\alpha_x^4 = F_x^2\,F'^2_x$:

2.°) *La quadrica polare di un punto* $[F]$ *della* $T_x^6 \equiv 0$, *sega* C *nei due punti radici di* F_x^2, *e nei sei del jacobiano* $(U\,F)\ U_x^5\,F_x$.

In particolare:

3.°) *La quadrica polare di un punto* (y) *di* C *ha in* (y) *un contatto tripunto con* C *e la sega ulteriormente nel primo gruppo polare* $U_y\,U_x^5 = 0$. *Per i punti* (y) *radici di* U_x^6, *e per essi soli, la quadrica ha in* (y) *contatto quadripunto.*

Inoltre:

(*) Per la $(U\,T)^6 = o$ sono così dimostrate le proprietà fondamentali della varietà cubica con 10 punti doppi studiata dai Sigg. Segre e Castelnuovo. V. per questo: Segre. *Sulla varietà cubica con 10 punti doppi* ecc. (Atti Acc. delle Scienze di Torino, 1887). *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni* (Mem. Acc. delle Scienze di Torino, 1888). Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a quattro dimensioni* (2ª Mem. Atti Ist. Ven., 1888) e loc. cit., (Pag. 27). Cfr. pure; Dragoni, *Sulla varietà cubica di* S_4 ecc. (Giorn. di Mat., Vol. XL, Pag. 255).

4.°) *L' iperpiano tangente ad* $(UT)^6 = 0$ *in un punto* (y) *di* C *oscula* C *in* (y) *e sega ulteriormente la curva nel polo* $U_y^5\, U_x = 0$ *di* (y) *rispetto ad* U_x^6. *L' iperpiano tangente ad* $(UT)^6 = 0$ *in un punto* (y) *radice di* U_x^6 *è quello ivi iperosculatore alla curva.*

È poi ovvia la proprietà che risulta per i punti-radice di una forma η_{r}, dalle relazioni (8).

§ 5. Le tre corde secanti una retta. Retta sizigetica e rette g. Interpretazione del sistema completo di T_x^6.

14. Ad una retta (a) (b) si appoggiano tre corde, perchè la varietà $j = 0$ è di terzo ordine. Mi propongo di trovare la sestica i cui punti-radice sono quelli in cui le tre corde segano C. Ricordo (V. 8) che la

$$\vartheta_x^2\, \vartheta_y^2\, \vartheta_z^2 - \frac{1}{10} \{ (y\,z)^2\, \Lambda_x^2 + (z\,x)^2\, \Lambda_y^2 + (x\,y)^2\, \Lambda_z^2 \} = 0 \qquad (1)$$

è soddisfatta se (x) (y) (z) sono in un S_3 colla (a) (b). La (1) è *identica* rispetto a (z), quando (x) (y) sono gli estremi di una corda secante (a) (b) ed allora soltanto. In tal caso si ha dunque:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_x^2\, \vartheta_y^2\, \vartheta_1^2 - \frac{1}{10} \{ y_2^2\, \Lambda_x^2 + x_2^2\, \Lambda_y^2 + (x\,y)^2\, \Lambda_1^2 \} = 0 \\ &\vartheta_x^2\, \vartheta_y^2\, \vartheta_1\, \vartheta_2 - \frac{1}{10} \{ - y_1\, y_2\, \Lambda_x^2 - x_1\, x_2\, \Lambda_y^2 + (x\,y)^2\, \Lambda_1\, \Lambda_2 \} = 0 \\ &\vartheta_x^2\, \vartheta_y^2\, \vartheta_2^2 - \frac{1}{10} \{ y_1^2\, \Lambda_x^2 + x_1^2\, \Lambda_y^2 + (x\,y)^2\, \Lambda_2^2 \} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Eliminando (y) dalle (2) si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix} = \Pi_x^6 = 0$$

dove si è posto:

$$\pi_{11} = \vartheta_x^2\, \vartheta_1^4 - \frac{1}{5}\, x_2^2\, \Lambda_1^2,$$

$$\pi_{12} = 2\, \vartheta_x^2\, \vartheta_1^3\, \vartheta_2 - \frac{1}{5}\, x_2^2\, \Lambda_1\, \Lambda_2 + \frac{1}{5}\, x_1\, x_2\, \Lambda_1^2,$$

$$\pi_{13} = \vartheta_x^2 \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 - \frac{1}{5} \Lambda_x^2 + \frac{1}{5} x_1 x_2 \Lambda_1 \Lambda_2,$$

$$\pi_{21} = \vartheta'^2_x \vartheta'^2_1 \vartheta'_2 + \frac{1}{10} x_1 x_2 \Lambda'^2_1 - \frac{1}{10} x_2^2 \Lambda'_1 \Lambda'_2,$$

$$\pi_{22} = 2\, \vartheta'^2_x \vartheta'^2_1 \vartheta'^2_2 + \frac{1}{10} \Lambda'^2_x + \frac{2}{5} x_1 x_2 \Lambda'_1 \Lambda'_2,$$

$$\pi_{23} = \vartheta'^2_x \vartheta'_1 \vartheta'^3_2 + \frac{1}{10} x_1 x_2 \Lambda'^2_2 - \frac{1}{10} x_1^2 \Lambda'_1 \Lambda'_2,$$

$$\pi_{31} = \vartheta''^2_x \vartheta''^2_1 \vartheta''^2_2 - \frac{1}{5} \Lambda''^2_x + \frac{1}{5} x_1 x_2 \Lambda''_1 \Lambda''_2,$$

$$\pi_{32} = 2\, \vartheta''^2_x \vartheta''_1 \vartheta''^3_2 - \frac{1}{5} x_1^2 \Lambda''_1 \Lambda''_2 + \frac{1}{5} x_1 x_2 \Lambda''^2_2,$$

$$\pi_{33} = \vartheta''^2_x \vartheta''^4_2 - \frac{1}{5} x_1^2 \Lambda''^2_2 .$$

La Π_x^6 è dunque la sestica cercata. Con un calcolo non breve, che ommetto, si può dare alla Π_x^6 una forma più opportuna e si ha:

I punti in cui le tre corde secanti la retta (*a*) (*b*) *si appoggiano a C sono i punti-radice della sestica:*

$$\left.\begin{aligned} \Pi_x^6 = \frac{1}{3} (\vartheta' \vartheta'')^2 (\vartheta'' \vartheta)^2 (\vartheta \vartheta')^2 \vartheta_x^2 \vartheta'^2_x \vartheta''^2_x - \\ - \frac{1}{5} (\vartheta \vartheta')^2 (\vartheta \Lambda) (\vartheta' \Lambda) \vartheta_x^3 \vartheta'^3_x + \frac{1}{20} (\vartheta \vartheta')^4 \vartheta_x^2 \vartheta'^2_x . \Lambda_x^2 - \\ - \frac{1}{25} (\vartheta \Lambda)^2 \vartheta_x^4 . \Lambda_x^2 + \frac{1}{100} (\Lambda \Lambda')^2 . \vartheta_x^6 - \frac{1}{250} \Lambda_x^2 \Lambda'^2_x \Lambda''^2_x . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Segue subito:

La $\Pi_x^6 = 0$, *tenuto fisso* (*x*) *rappresenta il complesso di 3.° grado delle rette secanti il cono cubico projettante C da* (*x*).

La $\Pi_x^6 = 0$, *tenuti fissi* (*x*) e (*b*) *rappresenta il cono cubico projettante C dalla sua secante* (*x*) (*b*).

Se la retta data è la *sizigetica* (*a*) (*H*) si ha:

$$\vartheta_x^6 = T_x^6 = T$$

$$\Lambda_x^2 = 0$$

quindi:
$$\Pi_x^6 = \frac{1}{3} (T' T'')^2 (T'' T)^2 (T T')^2 T_x^2 T'^2_x T''^2_x$$

e, posto:
$$(T T')^6 = A\,,$$

per una formola nota (*), anche:

$$\Pi_x^6 = \frac{1}{18} A\, T_x^6 . \qquad (4)$$

Questa formola conferma un risultato già ottenuto per altra via [V. 9.].

Insieme alla retta sizigetica considero le altre quattro rette:

$$g_1\ g_2\ g_3\ g_4$$

che si appoggiano alla stessa sestupla di piani osculatori.

Introducendo le notazioni:

$$K = K_x^8 = (T\,T')^2\, T_x^4\, T'^4_x$$
$$D_\Lambda = (\Lambda\,\Lambda')^2$$

si hanno per ogni retta g le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&(T\,T')^4\, T_x^2\, T'^2_x = 0\\
&(T'\,T'')^2\,(T''\,T)^2\,(T\,T')^2\, T_x^2\, T'^2_x\, T''^2_x = \frac{1}{6} A\, T\\
&(T\,T')^2\,(T\,\Lambda)\,(T'\,\Lambda)\, T_x^3\, T'^3_x = (K,\ \Lambda)^2\\
&(T\,\Lambda)^2\, T_x^4 = -\frac{2}{5}\Lambda_x^2\,\Lambda'^2_x\\
&D_\Lambda = \frac{25}{8} A\\
&(K,\ \Lambda)^2 + \frac{2}{5}(T,\ \Lambda)^2 \cdot \Lambda - \frac{2}{15} D_\Lambda\, T = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Di queste le prime due sono già state usate, la terza si dimostra con un breve calcolo simbolico (**), la quarta, la quinta e la sesta si deducono da

---

(*) STEPHANOS, loc. cit., Pag. 70. MAISANO, *La sestica binaria*, (Mem. Acc. Lincei, Serie III, Vol. 19) Pag. 19, Form. (23).

(**) Il seguente:

$$(K\Lambda)^2 K_x^6 = (T\,T')^2 \left\{ \frac{3}{7}(T\Lambda)^2\, T_x^2\, T'^4_x + \frac{4}{7}(T\Lambda)\,(T'\Lambda)\, T_x^3\, T'^3_x \right\};$$

$$(T\,T')^2\,(T\Lambda)\,(T'\Lambda)\, T_x^3\, T'^3_x = (T\,T')^2\,(T\Lambda)^2\, T_x^2\, T'^4_x - \frac{1}{2}(T\,T')^4\, T_x^2\, T'^2_x\, \Lambda_x^2 =$$

$$= (T\,T')^2\,(T\Lambda)^2\, T_x^2\, T'^4_x;$$

$$(K\Lambda)^2 K_x^6 = (T\,T')^2\,(T\Lambda)\,(T'\Lambda)\, T_x^3\, T'^3_x .$$

relazioni generali di STEPHANOS (*) tenuto conto della prima e ricordando che è $\Lambda_x^2 =|= 0$. Segue che per una retta g è:

$$2\,\Pi_x^6 = \frac{1}{2^4 \,.\, 3^2} A\, T_x^6 - \frac{1}{25} \Lambda_x^2 \Lambda'^2_x \Lambda''^2_x \qquad (6)$$

Dalla prima delle (5) risulta che *il sistema delle rette g, insieme a quello delle rette sizigetiche, forma la completa intersezione dei complessi quadratici del sistema lineare* ∞^4:

$$(\vartheta\,\vartheta')^4 (\alpha\,\vartheta)^4 (\alpha\,\vartheta')^4 = 0..$$

15. L'equazione di quinto grado in Λ, che fornisce i cinque combinanti quadratici relativi alle involuzioni ammettenti uno stesso combinante sestico ϑ (**), nel caso $\vartheta = T$, si semplifica come segue:

$$\frac{2^5}{5^4} \Lambda^5 + \frac{2^3}{3^2 \,.\, 5} A\, T\, \Lambda^2 - \frac{1}{3} A\, K\, \Lambda = 0.$$

Esclusa la radice $\Lambda = 0$, che corrisponde alla retta sizigetica, si ottiene l'equazione di 4.° grado:

$$\frac{2^5}{5^4} \Lambda^4 + \frac{2^3}{3^2 .\, 5} A\, T\, \Lambda - \frac{1}{3} A\, K = 0 \qquad (7)$$

che fornisce i combinanti

$$\Lambda_1\, \Lambda_2\, \Lambda_3\, \Lambda_4$$

relativi alle rette $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$. Se ne deduce:

$$-\frac{5^4}{2^5 .\, 3} A\, K = \Lambda_1\, \Lambda_2\, \Lambda_3\, \Lambda_4, \qquad (8)$$

caso particolare di una relazione già trovata [V. 11. Form. (4)].

La (8), tenuto conto delle considerazioni svolte ivi, conduce all'enunciato:

L'Hessiano K_x^8 della sestica T_x^6 si spezza in quattro fattori quadratici che sono ad un tempo i combinanti Λ delle quattro rette g, e le forme che forniscono i punti di contatto dei quattro S_3 bitangenti C condotti per la retta sizigetica.

Il sistema completo della sestica T si riduce, come è noto (***), all'inva-

---

(*) Loc. cit., Parte 2ª, n.° 9. Form. (2), n.° 16, Form. (7), n.° 12, Form. (7).

(**) Per questa V. STEPHANOS, loc. cit., Pag. 96, Form. (12).

(***) Cfr. MAISANO, loc. cit., Cap. III, § 1.

riante A ed ai covarianti T_x^6, K_x^8, τ_x^{12}, quando si ponga:

$$\tau = \tau_x^{12} = (T K) \, T_x^5 \, K_x^7.$$

L'annullarsi dell'invariante A è condizione necessaria e sufficiente perchè la sestica T abbia una radice quintupla (*) ed è quindi caratteristico delle rette secanti C e giacenti in piani osculatori. In tal caso, come risulta da (7), le quattro rette g_i coincidono colla sizigetica. Reciprocamente, se *una* delle rette g_i coincide colla sizigetica, la (7) deve mancare del termine noto, onde deve essere od $A = 0$, oppure $K = 0$, nel qual caso è ancora $A = 0$; cioè anche le altre tre rette g_i coincidono colla sizigetica in una retta secante C e giacente in un piano osculatore.

Mi propongo ora di trovare, insieme ad un nuovo significato geometrico dell'Hessiano K_x^8, anche quello del covariante τ_x^{12}.

L'S_3 iperosculatore in un punto (x) di C sega la sizigetica $(a)(H)$ in un punto P; i punti (y) di contatto degli S_3 iperosculatori condotti per P lo stesso (x) compreso, sono punti-radice della forma:

$$\Phi_y^4 = a_y^4 \, H_x^4 - a_x^4 \, H_y^4. \qquad (9)$$

Indicando con i_Φ, j_Φ i due invarianti della (9), si hanno le formole:

$$\left.\begin{aligned} i_\Phi &= -12 \, K_x^8 \\ j_\Phi &= \quad 24 \, \tau_x^{12} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

delle quali la prima è data dal Clebsch [loc. cit. § 43 Form. (6)].

Per ottenere la seconda, si confronti l'espressione di j_Φ, che si ha ponendo in quella di $j_{\varkappa\lambda}$ [ivi § 41 in nota] rispettivamente $\varkappa = H_x^4$, $\lambda = -a_x^4$, coll'espressione di τ_x^{12}, che si ottiene da quella di K_x^8 [ivi § 43 Form. (7)], tenuto conto di una formola nota [ivi § 42 Form. (2)].

Tenendo presente il significato dell'annullarsi degli invarianti i, j, quello della forma (9), la sua simmetria rispetto alle (y) (x), si deduce:

L'Hessiano K_x^8 della sestica T_x^6 si spezza nelle due quaterne armoniche dell'involuzione sizigetica; i suoi punti-radice sono quelli di contatto degli S_3 iperosculatori condotti per i due punti in cui la retta sizigetica incontra la quadrica $i = 0$, od anche i punti d'intersezione con C dei due S_3 ivi tangenti alla quadrica.

(*) Cfr. Maisano, loc. cit., Cap. I, Teor. V e Cap. V.

Il Jacobiano τ_x^{12} di T_x^6 e K_x^8 si spezza nelle tre quaterne equianarmoniche dell'involuzione sizigetica; i suoi punti-radice sono quelli di contatto degli S_3 iperosculatori condotti pei punti in cui la retta sizigetica incontra la varietà delle corde.

Ne segue [V. 3. III)]:

La forma di 24.° ordine $K^3 + \mu \tau^2$ si spezza in sei quaterne dell'involuzione sizigetica aventi lo stesso birapporto (invariante assoluto $= 3\mu$); i suoi punti-radice sono quelli di contatto degli S_3 iperosculatori condotti per i punti in cui la retta sizigetica incontra la varietà $i^3 - 3\mu j^2 = 0$.

Per $\mu = 2$ la varietà coincide con quella dei piani osculatori [V. 4. I)] onde la forma $K^3 + 2\tau^2$ dovrà [V. 9], differire dalla quarta potenza di T per un solo fattore; il che è confermato dalla formola di Clebsch (*):

$$-\frac{A}{18} T^4 = K^3 + 2\tau^2. \qquad (\alpha)$$

A chiarire maggiormente le considerazioni qui svolte, insieme all'involuzione sizigetica

$$\varkappa\, a_x^4 + \lambda\, H_x^4 = 0 \qquad (11)$$

si introduca (**) la cubica:

$$\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{1}{2} i \varkappa \lambda^2 - \frac{1}{3} j \lambda^3$$

e, indicando con $T_{\varkappa\lambda}$, $i_{\varkappa\lambda}$, $j_{\varkappa\lambda}$ le forme T, i, j relative alla (11), si ricordino le identità:

$$T_{\varkappa\lambda} = \Omega\, T$$
$$i_{\varkappa\lambda} = -3\, \Delta_\Omega$$
$$j_{\varkappa\lambda} = -3\, Q_\Omega$$
$$i_{\varkappa\lambda}^3 - 6 j_{\varkappa\lambda}^2 = \Omega^2 (i^3 - 6 j^2).$$

Le $\varkappa$, λ si possono considerare come coordinate projettive omogenee di un punto della retta sizigetica e si ha:

Su di una retta sizigetica i tre punti di intersezione colla varietà dei piani osculatori, i tre punti d'intersezione colla varietà delle corde, i due punti d'intersezione colla quadrica $i = 0$ costituiscono rispettivamente una cu-

(*) Loc. cit., § 111, Form. (9).

(**) Cfr. Clebsch, loc. cit., § 41.

bica Ω, il suo covariante cubico Q_Ω, il suo Hessiano Δ_Ω. L'involuzione di sesto ordine segata su di essa dal fascio $i^3 - 3\mu j^2 = 0$ è la $\Delta^3_\Omega \mu Q^2_\Omega = 0$.

Se ad ogni punto $(\varkappa, \lambda)$ della sizigetica si fanno corrispondere i punti di contatto degli S_2 iperosculatori condotti per esso, fra la retta e la curva C è posta una corrispondenza (1, 4). *In essa all'involuzione di 6.º ordine $\Delta^3_\Omega \mu Q^2_\Omega = 0$ corrisponde quella di 24.º ordine $K^3 + \mu \tau^2 = 0$.*

Alla (α) fa così riscontro la nota formola (*):

$$- R_\Omega \Omega^2 = \Delta^3_\Omega + 2\, Q^2_\Omega .$$

Delle tre corde che si appoggiano alla retta sizigetica si consideri quella secante C nei punti-radice di φ^2_x, indicando al solito con $\varphi^2_x \psi^2_x \chi^2_x$ i tre fattori quadratici di T^6_x. Essa è rappresentata da:

$$(\varphi\, a)^2 a^2_x \equiv 0 \tag{12}$$

essendo (a) il punto corrente. Dalle (4) del § 44 dell'op. cit. di Clebsch si deduce:

$$(m'' - m')\, \varphi^2_x \varphi'^2_x = (m'' - m)\, \psi^2_x \psi'^2_x - (m' - m)\, \chi^2_x \chi'^2_x$$

dove con m, m', m'' si indicano le radici di $\Omega = 0$. Ne segue che uno dei punti di Q_Ω, e precisamente il coniugato armonico di (m) rispetto (m') (m'') ha per coordinate i coefficienti della biquadratica.

$$\alpha^4_x = (m'' - m)\, \psi^2_x \psi'^2_x + (m' - m)\, \chi^2_x \chi'^2_x .$$

Dico che (α) giace sulla corda (12). Ed invero (ricordando:

$$(\varphi\, \psi)^2 = (\varphi\, \chi)^2 = 0):$$

$$(\varphi\, \alpha)^2 \alpha^2_x = \frac{2}{3} \left\{ (m'' - m)\, (\varphi\, \psi)\, (\varphi\, \psi')\, \psi_x \psi'_x + (m' - m)\, (\varphi\, \chi)\, (\varphi\, \chi')\, \chi_x \chi'_x \right\} =$$

$$= - \frac{1}{3} \left\{ (m'' - m)\, (\psi\, \psi')^2 \varphi^2_x + (m' - m)\, (\chi\, \chi')^2 \varphi^2_x \right\}$$

che si annulla identicamente per le (2) del § 45 loc. cit. di Clebsch. Onde:

Sulla retta sizigetica il punto d'appoggio di una delle corde che la segano ed il punto d'intersezione dei piani osculatori negli estremi di tale corda dividono armonicamente i punti d'intersezione delle altre due coppie di piani osculatori.

(*) § 35, Form. (7), di Clebsch, loc. cit.

E, per l'invertibilità delle forme Ω, Q_Ω (*), si ha analogamente:

Sulla retta sizigetica il punto d'appoggio di una delle corde ed il punto d'intersezione dei piani osculatori negli estremi di essa dividono armonicamente i punti d'appoggio delle altre due corde.

Termino il presente numero con una seconda interpretazione geometrica del jacobiano τ_x^{12}. Delle dieci quadratiche η [V. 11, 12] annesse alla sestica T_x^6, quattro coincidono colle forme Λ_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) radici della (7); le rimanenti sei sono date da

$$\eta_{rs} = \lambda(\Lambda_r - \Lambda_s) \quad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

dove λ è un fattore di proporzionalità. Il prodotto di queste ultime differisce quindi solo per un fattore di proporzionalità dalla radice quadrata del discriminante di (7), ossia da:

$$\sqrt{A^3 \left\{ K^3 + \frac{A}{18} T^4 \right\}}$$

e, per la (α), da τ_x^{12}. Tenuto presente il significato delle η, risulta:

Le quattro rette g_ν annesse alla retta sizigetica (a) (H) sono a due a due in sei S_3 bitangenti ed i 12 punti di contatto sono le radici del Jacobiano τ_x^{12}.

16. Indico rispettivamente con

$$\Pi_1 \, \Pi_2 \, \Pi_3 \, \Pi_4$$

le forme Π_x^6 relative alle rette $g_1 \, g_2 \, g_3 \, g_4$. Dalla (6) del n.° 14 si deduce:

$$2^4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 = \left(\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} A\,T - \frac{1}{5^2} \Lambda_1^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} A\,T - \frac{1}{5^2} \Lambda_2^3\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} A\,T - \frac{1}{5^2} \Lambda_3^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} A\,T - \frac{1}{5^2} \Lambda_4^3\right)$$

ossia:

$$2^4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 = \frac{1}{2^{16} \cdot 3^8} A^4 T^4 - \frac{1}{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^2} A^3 T^3 (\Lambda_1^3 + \Lambda_2^3 + \Lambda_3^3 + \Lambda_4^3) +$$
$$+ \frac{1}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4} A^2 T^2 \{ \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 + \Lambda_1^3 \Lambda_3^3 + \Lambda_1^3 \Lambda_4^3 + \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 + \Lambda_2^3 \Lambda_4^3 + \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 \} -$$
$$- \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6} A\,T \{ \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 + \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 \Lambda_1^3 + \Lambda_4^3 \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 + \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \} +$$
$$+ \frac{1}{5^8} \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \Lambda_4^3$$

(*) Clebsch, loc. cit., § 36, Pag. 123.

D'altra parte, per note formole sulle funzioni simmetriche (*) si hanno le identità:

$$\Lambda_1^3 + \Lambda_2^3 + \Lambda_3^3 + \Lambda_4^3 = -\frac{5^3}{3 \cdot 2^4} A\, T$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^3 + \Lambda_1^3 \Lambda_3^3 + \Lambda_1^3 \Lambda_4^3 + \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 + \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 + \Lambda_2^3 \Lambda_4^3 = \frac{5^6}{3^3 \cdot 2^4} A^2\, T^2$$

$$\Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 + \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 \Lambda_1^3 + \Lambda_4^3 \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 + \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 = -\frac{5^9}{3^6 \cdot 2^6} A^3\, T^3$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 = -\frac{5^{12}}{3^3 \cdot 2^{15}} A^3\, K^3$$

onde segue la relazione:

$$2^{19} \cdot 3^3 \cdot \Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3\, \Pi_4 = A^3 \left[\frac{7^3}{2 \cdot 3^2} A\, T^4 - 5^4\, K^3 \right]$$

dalla quale risulta che il prodotto delle $\Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3\, \Pi_4$ è una forma dell'involuzione di 24° ordine (sopra considerata) a cui appartengono T^4, K^3, τ^2.

§ 6. Rette in iperpiani iperosculatori. Fascio $\mu\, (\vartheta\, \vartheta')^6 + \nu\, (\Lambda\, \Lambda')^2 = 0$ di complessi quadratici.

17. Se la retta (a) (b) giace nell'S_3 iperosculatore a C in (x'), le due equazioni $a_x^4 = 0$, $b_x^4 = 0$ hanno in comune la radice (x') ed il *risultante* è zero. Reciprocamente se il risultante è zero la retta (a) (b) giace in un S_3

(*) Ed invero, indicando con s_i la somma delle potenze i^{esime} delle radici di (7) si ha (p. es. dalla formola di Waring):

$$s_3 = -3 p_3 \;,\; s_6 = 3 p_3^2 \;,\; s_9 = -3 p_3^3 \;\; (\text{dove } p_3 = \frac{5^3}{3^2\, 2^2} A\, T)$$

Inoltre:

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^3 + \ldots = \frac{1}{2} (s_3^2 - s_6)$$

$$\Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \Lambda_4^3 + \ldots = \frac{1}{6} (s_3^3 - 3\, s_6\, s_3 + 2\, s_9).$$

Si ottengono così le prime tre formole. La quarta si deduce dalla (8) di 15.

iperosculatore. L'espressione del risultante è data dal Gordan (*) e con un calcolo che ommetto si può porre sotto la forma che compare qui sotto. Si ha così:

Le rette poste in iperpiani iperosculatori formano un complesso di quarto grado rappresentato dall'equazione:

$$0=\frac{1}{2^8}R=(\vartheta\vartheta')^2(\vartheta\vartheta'')^2(\vartheta\vartheta''')^2(\vartheta'\vartheta'')^2(\vartheta'\vartheta''')^2(\vartheta''\vartheta''')^2-$$

$$-\frac{2^3}{3\,.\,5}(\vartheta\vartheta')^4(\vartheta\vartheta'')^2(\vartheta'\vartheta'')^2(\vartheta''\Lambda)^2+\frac{2^3}{3^3.\,5^2}(\vartheta\vartheta')^6(\Lambda\Lambda')^2+$$

$$+\frac{2^4}{3^2.\,5^2}(\vartheta\vartheta')^4(\vartheta\Lambda)^2(\vartheta'\Lambda')^2+\frac{2^7}{3^3\,.\,5^3}(\vartheta\Lambda)^2(\vartheta\Lambda')^2(\vartheta\Lambda'')^2+$$

$$+\frac{2^5}{3^3.\,5^4}(\Lambda\Lambda')^2(\Lambda''\Lambda''')^2.$$

Segue subito:

Se nella $R=0$ si tiene fisso (b), essa rappresenta complessivamente i quattro S_3 iperosculatori condotti per (b).

Il complesso di quarto grado $R=0$, ed il sistema delle rette sizigetiche $\Lambda_x^2\equiv 0$, hanno in comune ∞^2 rette i cui punti costituiscono una *forma* dell'S_4. L'equazione di tale forma è evidentemente:

$$(T\,T')^2(T\,T'')^2(T\,T''')^2(T'\,T'')^2(T'\,T''')^2(T''\,T''')^2=0$$

e per una formola già citata [la seconda delle (5) in 14., tenuto conto di altra di Clebsch (**)] si può scrivere così:

$$(i^3-6\,j^2)^2=0.$$

Risulta (V. 4, I):

La forma luogo delle rette sizigetiche giacenti in S_3 iperosculatori è quella luogo dei piani osculatori da contarsi due volte.

18. Ogni sestica U_x^6 determina [V. 10] un complesso lineare $(U\vartheta)^6=0$. Se una retta appartiene al complesso determinato dalla sestica dei punti di contatto dei piani osculatori che la segano, si ha:

$$(\vartheta\vartheta')^6=0. \qquad (1)$$

(*) *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen* (Math. Ann. Bd. 3.), § 5. Form. (IX).

(**) Loc. cit., § 43, Form. (9).

La (1) rappresenta un complesso quadratico. Altro notevole complesso quadratico è:

$$(\Lambda\,\Lambda')^2 = 0 \tag{2}$$

del quale si è visto altrove [V. 9] il significato. I complessi (1) e (2) determinano il fascio

$$\mu\,(\vartheta\,\vartheta')^6 + \nu\,(\Lambda\,\Lambda')^2 = 0. \tag{3}$$

al quale ne appartengono altri strettamente legati alla curva C.

Data una retta ne esistono altre quattro che si appoggiano alla stessa sestupla di piani osculatori. Interpretando geometricamente un teorema di Stephanos (*), risulta:

Le rette colle quali viene a coincidere una delle rimanenti quattro secanti la stessa sestupla di piani osculatori costituiscono il complesso quadratico.

$$5\,(\vartheta\,\vartheta')^6 - 8\,(\Lambda\,\Lambda')^2 = 0 \tag{4}$$

del fascio (3).

Si tenga ora presente la quinta delle (5) del n.° 14, che sussiste per ogni retta g annessa ad una retta sizigetica, mentre non sussiste per le rette sizigetiche (salvo il caso della coincidenza con una retta g).

Tenuto conto allora dell'osservazione con cui si chiude lo stesso n.° 14 si ha:

Le rette g formano la completa intersezione del sistema di complessi quadratici $(\vartheta\,\vartheta')^4\,(\alpha\,\vartheta)^4\,(\alpha\,\vartheta')^4 = 0$ *col complesso*

$$25\,(\vartheta\,\vartheta')^6 - 8\,(\Lambda\,\Lambda')^2 = 0 \tag{5}$$

del fascio (3).

Si consideri ora una retta (a) (b) posta in un piano (y) (z) (t) trisecante C. Sarà allora:

$$a_x^4 = \lambda\,(y\,x)^4 + \mu\,(z\,x)^4 + \nu\,(t\,x)^4$$
$$b_x^4 = \lambda'\,(y\,x)^4 + \mu'\,(z\,x)^4 + \nu'\,(t\,x)^4$$

onde, posto:

$$\alpha = \mu\,\nu' - \mu'\,\nu, \quad \beta = \nu\,\lambda' - \nu'\,\lambda, \quad \gamma = \lambda\,\mu' - \lambda'\,\mu$$

si deduce:

$$\vartheta_x^6 = \alpha\,(z\,t)\,(z\,x)^3\,(t\,x)^3 + \beta\,(t\,y)\,(t\,x)^3\,(y\,x)^3 + \gamma\,(y\,z)\,(y\,x)^3\,(z\,x)^3$$
$$\Lambda_x^2 = \alpha\,(z\,t)^3\,(z\,x)\,(t\,x) + \beta\,(t\,y)^3\,(t\,x)\,(y\,x) + \gamma\,(y\,z)^3\,(y\,x)\,(z\,x) \quad .$$

(*) Loc. cit., Pag. 83.

ed anche:

$$\left.\begin{aligned}(\vartheta\,\vartheta')^6 &= -\frac{1}{20}\{\alpha^2(z\,t)^8+\beta^2(t\,y)^8+\gamma^2(y\,z)^8-2\,\beta\,\gamma\,(y\,z)^4(y\,t)^4-\\&\qquad -2\,\gamma\,\alpha\,(z\,t)^4(z\,y)^4-2\,\alpha\,\beta\,(t\,y)^4(t\,z)^4\}\\(\Lambda\,\Lambda')^2 &= -\frac{1}{2}\{\alpha^2(z\,t)^8+\beta^2(t\,y)^8+\gamma^2(y\,z)^8-2\,\beta\,\gamma\,(y\,z)^4(y\,t)^4-\\&\qquad -2\,\gamma\,\alpha\,(z\,t)^4(z\,y)^4-2\,\alpha\,\beta\,(t\,y)^4(t\,z)^4\}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Segue:

$$10\,(\vartheta\,\vartheta')^6-(\Lambda\,\Lambda')^2=0,$$

ossia:

Le rette poste in piani trisecanti C formano il complesso quadratico

$$10\,(\vartheta\,\vartheta')^6-(\Lambda\,\Lambda')^2=0 \qquad (7)$$

del fascio (3).

L'equazione di questo complesso si poteva anche dedurre dall'equazione (10) di 7., introducendovi i combinanti ϑ, Λ.

Insieme alla retta $(a)\,(b)$ del piano trisecante $(y)\,(z)\,(t)$ si introduca la quintica:

$$\Psi_x^5=\frac{(z\,t)}{\alpha}(y\,x)^5+\frac{(t\,y)}{\beta}(z\,x)^5+\frac{(y\,z)}{\gamma}(t\,x)^5.$$

Si ha:

$$(\Psi\,\Psi')^2\,\Psi_x^3\,\Psi_x'^3=\frac{2\,(z\,t)\,(t\,y)\,(y\,z)}{\alpha\,\beta\,\gamma}\,\vartheta_x^6,\qquad(\Psi\,\Psi')^4\,\Psi_x\,\Psi'_x=\frac{2\,(z\,t)\,(t\,y)\,(y\,z)}{\alpha\,\beta\,\gamma}\,\Lambda_x^2$$

da cui, tenuto conto di una formola di Clebsch (loc. cit, § 74, Form. (1)) si deduce anche:

$$\begin{aligned}j_{\Psi}&=(\Psi'\,\Psi'')^2(\Psi''\,\Psi)^2(\Psi\,\Psi')^2\,\Psi_x\,\Psi'_x\,\Psi''_x=-\frac{2\,(z\,t)\,(t\,y)\,(y\,z)}{\alpha\,\beta\,\gamma}(\Lambda\,\Psi)^2\,\Psi_x^3=\\&=-\frac{2\,(z\,t)\,(t\,y)\,(y\,z)}{\alpha\,\beta\,\gamma}\left\{\frac{(z\,t)}{\alpha}\Lambda_y^2(y\,x)^3+\frac{(t\,y)}{\beta}\Lambda_z^2(z\,x)^3+\frac{(y\,z)}{\gamma}\Lambda_t^2(t\,x)^3\right\}=\\&=\frac{2\,(z\,t)^2(t\,y)^2(y\,z)^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}\{(z\,t)^3(y\,x)^3+(t\,y)^3(z\,x)^3+(y\,z)^3(t\,x)^3\}\\&=\frac{6\,(z\,t)^3(t\,y)^3(y\,z)^3}{\alpha\,\beta\,\gamma}(y\,x)\,(z\,x)\,(t\,x).\end{aligned}$$

Concludendo:

Ogni retta del complesso (7) *ha per combinante sestico l'Hessiano di una quintica, ha per combinante quadratico la quarta spinta di questa e giace nel*

piano trisecante C nei punti-radice del covariante cubico $j_{\psi'}$ della quintica stessa.

Questo teorema pone quindi lo studio della presente questione geometrica in relazione colle considerazioni di Stephanos (*) sulle involuzioni biquadratiche aventi per combinante sestico l'Hessiano di una quintica e colla riduzione di una quintica binaria a somma di tre quinte potenze effettuata da Salmon e Clebsch (**). Si noti [V. 4. III,] che il piano $(y)\,(z)\,(t)$ sega la varietà dei piani osculatori in una curva razionale del sesto ordine γ posta in corrispondenza biunivoca con C, dotata nei punti $(y)\,(z)\,(t)$ di tre punti tripli (ad un sol ramo) e, fuori di questi, di un punto doppio. Assunto nel piano come triangolo fondamentale $(y)\,(z)\,(t)$, si possono considerare le $\lambda\,\mu\,\nu$ come coordinate di un punto di esso. La curva γ è allora rappresentata da:

$$\lambda : \mu : \nu = (z\,t)\,(z\,x)^3\,(t\,x)^3 : (t\,y)\,(t\,x)^3\,(y\,x)^3 : (y\,z)\,(y\,x)^3\,(z\,x)^3 \tag{8}$$

ed è notevole che *le rette del piano la segano negli Hessiani delle quintiche apolari* (***) *alla cubica dei tre punti* $(y)\,(z)\,(t)$.

Le singolarità della curva corrispondono ai punti d'intersezione del piano colla varietà delle tangenti $(i = 0,\ j = 0)$ e colla $T^6_x \equiv 0$. Se si osserva che la varietà $j = 0$ delle corde ha in comune col piano solo i lati del triangolo fondamentale e che la quadrica $i = 0$ lo sega secondo la conica

$$(z\,t)^4\,\mu\,\nu + (t\,y)^4\,\nu\,\lambda + (y\,z)^4\,\lambda\,\mu = 0 \tag{9}$$

le cui intersezioni con γ sono tutte riunite nei punti $(y)\,(z)\,(t)$, risulta che le singolarità di γ provenienti dalla varietà delle tangenti sono raccolte nei punti $(y)\,(z)\,(t)$. La $T^6_x \equiv 0$ sega il piano in questi punti ed ulteriormente nel punto doppio per γ. Se ora si tiene presente un teorema precedente [V. 6.] risulta: *I punti-radice dell'Hessiano Δ^2_x della cubica $(y\,x)\,(z\,x)\,(t\,x)$ sulla curva γ, cadono nel punto doppio.* Il sistema degli S_3 iperosculatori a C è segato dal piano nel sistema delle tangenti a γ. Segue: *La curva γ è della quarta classe. Il luogo dei punti da cui partono quaterne armoniche di tangenti è l'insieme delle tre congiungenti i punti tripli. Il luogo dei punti da cui partono quaterne equianarmoniche di tangenti è la conica* (9). Ed è evi-

(*) Loc. cit., Pag. 81.

(**) Cfr. Clebsch, loc. cit., § 95. Ivi è pure citato il Salmon.

(***) Una quintica Ψ è infatti apolare ad una cubica, coincidente col covariante $j_{\psi'}$. (Cfr. Clebsch, loc. cit., § 76, Pag. 281 e § 95, Pag. 381).

dente che *le quaterne di punti di contatto sono quelle apolari alla cubica* $(y)(z)(t)$.

Ad altro complesso del fascio (3) si perviene nel modo seguente.

Data una retta $(a)(b)$, un punto generico di essa corrisponde alla biquadratica $\varkappa a_x^4 + \lambda b_x^4$; ed i punti $(\varkappa, \lambda)$ in cui la retta sega la quadrica $i = 0$ sono forniti dall'equazione:

$$(a a')^4 \varkappa^2 + 2 (a b)^4 \varkappa \lambda + (b b')^4 \lambda^2 = 0$$

la quale ha per discriminante:

$$D = (a a')^4 (b b')^4 - (a b')^4 (b a')^4.$$

Ma dallo sviluppo:

$$a_x^4 b_y^4 - a_y^4 b_x^4 = 4 (x y) \vartheta_x^3 \vartheta_y^3 + \frac{8}{5} (x y)^3 \Lambda_x \Lambda_y$$

si deduce:

$$\frac{1}{4} D = (\vartheta \vartheta')^6 + \frac{2}{5} (\Lambda \Lambda')^2.$$

Interpretando geometricamente si ha:

Le rette tangenti la quadrica $i = 0$ *formano un complesso quadratico*

$$5 (\vartheta \vartheta')^6 + 2 (\Lambda \Lambda')^2 = 0 \tag{10}$$

del fascio (3).

Il significato delle equazioni (7) (10) permette di caratterizzare molto semplicemente il sistema base del fascio (3) di complessi quadratici. Precisamente:

Il sistema base del fascio (3) *è costituito dalle tangenti ad* $i = 0$ *che giacciono in piani trisecanti* C.

In ogni piano trisecante tali rette inviluppano la conica (9).

Per ogni punto dello spazio passano infinite rette del sistema, generatrici del cono ellittico di 4.° ordine (a due dimensioni) comune al cono degli S_2 trisecanti e a quello inviluppante $i = 0$ (*).

(*) Se da un punto O di S_4 si projetta C su di un iperpiano Σ, si ottiene una curva razionale del 4° ordine C' di Σ. Le rette di un complesso (3) passanti per O formano un cono quadrico segato da Σ in una quadrica, la quale, al variare del complesso nel fascio, descrive un notevole fascio di quadriche annesso a C', determinato dalla quadrica contenente C' (sezione del cono di S_2 trisecanti C) e dalla quadrica inviluppata dai piani secanti C' in quaterne equianarmoniche (sezione del cono circoscritto ad $i = o$). Per tale fascio di quadriche Cfr. BERZOLARI, *Sui combinanti di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine* (Annali di Matem., Serie II, Tomo XX), § 4.

§ 7. Cenno sulle varietà di piani e di iperpiani annesse a C.

19. Nel presente paragrafo svolgo qualche breve considerazione sulle varietà di *piani* e di *iperpiani* annesse alla curva C.

Date le tre biquadratiche:

$$\left.\begin{aligned} a_x^4 &= \bar{a}_0 x_1^4 + 4\,\bar{a}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{a}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{a}_3 x_1 x_2^3 + \bar{a}_4 x_2^4 \\ b_x^4 &= \bar{b}_0 x_1^4 + 4\,\bar{b}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{b}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{b}_3 x_1 x_2^3 + \bar{b}_4 x_2^4 \\ c_x^4 &= \bar{c}_0 x_1^4 + 4\,\bar{c}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{c}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{c}_3 x_1 x_2^3 + \bar{c}_4 x_2^4 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

le coordinate puntuali dei piano (a) (b) (c) sono i minori di terzo ordine della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\ \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \bar{b}_4 \\ \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 & \bar{c}_4 . \end{matrix} \right\| \quad (2)$$

E poichè ogni combinante delle (1) si può esprimere in modo intero per mezzo di tali minori, risulta che l'annullarsi di un invariante-combinante delle (1) rappresenta un *complesso di piani* e l'annullarsi identico di un covariante-combinante rappresenta la varietà completa intersezione dei complessi di piani rappresentati dall'annullarsi dei coefficienti. Introdotti i combinanti elementari:

$$\Theta_x^6 = (b\,c)\,(c\,a)\,(a\,b)\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2$$

$$L_x^2 = -\frac{1}{4}\,(b\,c)\,(c\,a)\,(a\,b)\,\{(b\,c)^2\,a_x^2 + (c\,a)^2\,b_x^2 + (a\,b)^2\,c_x^2\}$$

il grado di un'espressione in coordinate di piani è dato dal numero dei simboli Θ, L complessivamente introdotti. Si consideri la retta (α) (β) polare del piano $(a)\,(b)\,(c)$ rispetto alla quadrica $i = 0$.

Per una proprietà generale dei sistemi lineari *conjugati* di forme binarie risulta che i combinanti:

$$\vartheta_x^6 = (\alpha\,\beta)\,\alpha_x^3\,\beta_x^3$$

$$\Lambda_x^2 = (\alpha\,\beta)^3\,\alpha_x\,\beta_x$$

differiscono dai combinanti Θ_x^6, L_x^2 solo per fattori numerici.

Per determinare anche i fattori numerici, si noti che alla condizione

$$(b\,c)(c\,a)(a\,b)\,a_y\,b_y\,c_y\,a_z\,b_z\,c_z = 0 \qquad (3)$$

perchè i punti (y) (z) di C giacciano in un S_3 passante pel piano $(a)(b)(c)$, corrisponde, nella polarità, l'altra:

$$\alpha_y^4\,\beta_z^4 - \alpha_z^4\,\beta_y^4 = 0 \qquad (4)$$

perchè gli S_3 osculatori in (y) (z) abbiamo in comune un punto della retta $(\alpha)(\beta)$. D'altra parte, sviluppando, le (3) (4) si possono scrivere

$$\Theta_y^3\,\Theta_z^3 + \frac{2}{5}(y\,z)^2\,L_y\,L_z = 0 \qquad (3)'$$

$$\vartheta_y^3\,\vartheta_z^3 + \frac{2}{5}(y\,z)^2\,\Lambda_y\,\Lambda_z = 0 \qquad (4)'$$

e dal loro confronto risulta che è lecito porre:

$$\Theta_x^6 = \vartheta_x^6, \quad L_x^2 = \Lambda_x^2.$$

Segue:

Dai teoremi relativi a varietà di rette si deducono teoremi relativi a varietà di piani, sostituendo ad ogni ente o proprietà l'ente o la proprietà corrispondente nella polarità rispetto alla quadrica $i = 0$ e, nelle formole, ai combinanti $\vartheta_x^6\,\Lambda_x^2$ di retta i combinanti $\Theta_x^6\,L_x^2$ di piano.

Sia ora dato un piano arbitrario $(a)(b)(c)$ di combinanti Θ_x^6, L_x^2 e sia data una retta pure arbitraria $(\alpha)(\beta)$ di combinanti ϑ_x^6, Λ_x^2. La condizione perchè i punti $(a)(b)(c)(\alpha)(\beta)$ siano in un S_3, ossia perchè il piano e la retta s'incontrino, è data da:

$$(b\,c)(c\,a)(a\,b)(a\,\alpha)(b\,\alpha)(c\,\alpha)(a\,\beta)(b\,\beta)(c\,\beta)(\alpha\,\beta) = 0$$

cioè, per quanto precede, da:

$$(\Theta\,\vartheta)^6 + \frac{2}{5}(L\,\Lambda)^2 = 0. \qquad (5)$$

La (5), a seconda che si tenga fisso il piano o la retta, rappresenta un complesso lineare *speciale* di rette o di piani.

Considero infine quattro biquadratiche

$$\left.\begin{aligned}
a_x^4 &= \bar{a}_0 x_1^4 + 4\,\bar{a}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{a}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{a}_3 x_1 x_2^3 + \bar{a}_4 x_2^4 \\
b_x^4 &= \bar{b}_0 x_1^4 + 4\,\bar{b}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{b}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{b}_3 x_1 x_2^3 + \bar{b}_4 x_2^4 \\
c_x^4 &= \bar{c}_0 x_1^4 + 4\,\bar{c}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{c}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{c}_3 x_1 x_2^3 + \bar{c}_4 x_2^4 \\
d_x^4 &= \bar{d}_0 x_1^4 + 4\,\bar{d}_1 x_1^3 x_2 + 6\,\bar{d}_2 x_1^2 x_2^2 + 4\,\bar{d}_3 x_1 x_2^3 + \bar{d}_4 x_2^4
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ed osservo che le coordinate dell'iperpiano (a) (b) (c) (d) sono i minori di quarto ordine della matrice:

$$\left\|\begin{matrix}
\bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\
\bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \bar{b}_4 \\
\bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 & \bar{c}_4 \\
\bar{d}_0 & \bar{d}_1 & \bar{d}_2 & \bar{d}_3 & \bar{d}_4
\end{matrix}\right\| \qquad (7)$$

mentre la forma:

$$\alpha_x^4 = (a\,b)\,(a\,c)\,(a\,d)\,(b\,c)\,(b\,d)\,(c\,d)\,a_x\,b_x\,c_x\,d_x \qquad (8)$$

ha per coefficienti (a meno di fattori numerici) gli stessi minori. E poichè (α), come facilmente si verifica, è il polo di (a) (b) (c) (d) rispetto ad $i = 0$ si conclude:

Dai teoremi relativi a varietà di punti si deducono teoremi relativi a varietà di iperpiani, applicando la polarità rispetto alla quadrica $i = 0$ e sostituendo, nelle formole, alla biquadratica a_x^4 generica il combinante α_x^4 di un iperpiano.

Pavia, Luglio 1903.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI.

In seguito a difficoltà d'ordine materiale è stato deciso che a partire dal Vol. VI della Serie III degli *Annali di Matematica* il prezzo degli *Estratti* (oltre le copie *quaranta* che mettiamo gratuitamente a disposizione dei Signori Autori presso l'editore), e fino alla concorrenza di *cento esemplari*, sarà regolato dalla tariffa seguente.

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI "ANNALI DI MATEMATICA"

(compressa la copertina non stampata, spese postali a parte).

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie 25	50	75	100
Pagine 4	Lire 3 —	Lire 3 50	Lire 4 —	Lire 4 50
" 8	" 3 50	" 4 —	" 4 50	" 5 —
" 12	" 6 50	" 7 50	" 8 50	" 9 50
" 16	" 7 —	" 8 —	" 9 —	" 10 —
" 20	" 10 —	" 11 50	" 13 —	" 14 50
" 24	" 10 50	" 12 —	" 13 50	" 15 —
" 28	" 13 50	" 15 50	" 17 —	" 19 50
" 32	" 14 —	" 16 —	" 18 —	" 20 —

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo.

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno, ciascuno di 10 a 12 fogli in 4.°

L'associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa lire 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o cartolina vaglia, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla Tipo-Litografia ***Rebeschini di Turati e C., via Rovello 16, Milano,*** alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

Ulrico Hoepli in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);

Carlo Clausen già Ermanno Loescher in Torino (via Po, 19, Palazzo della R. Università);

Fratelli Bocca in Torino, Roma, Firenze;

Gauthier-Villars in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);

Dulau et Comp. in Londra (37, Soho-Square);

R. Friedländer et Sohn in Berlino (Carlstrasse, 11).

Di ogni pubblicazione inviata direttamente da Autori o Editori alla Direzione degli *Annali* verrà dato l'annunzio in due successivi fascicoli.

È in corso di stampa il fascicolo 1.° del tomo X.°